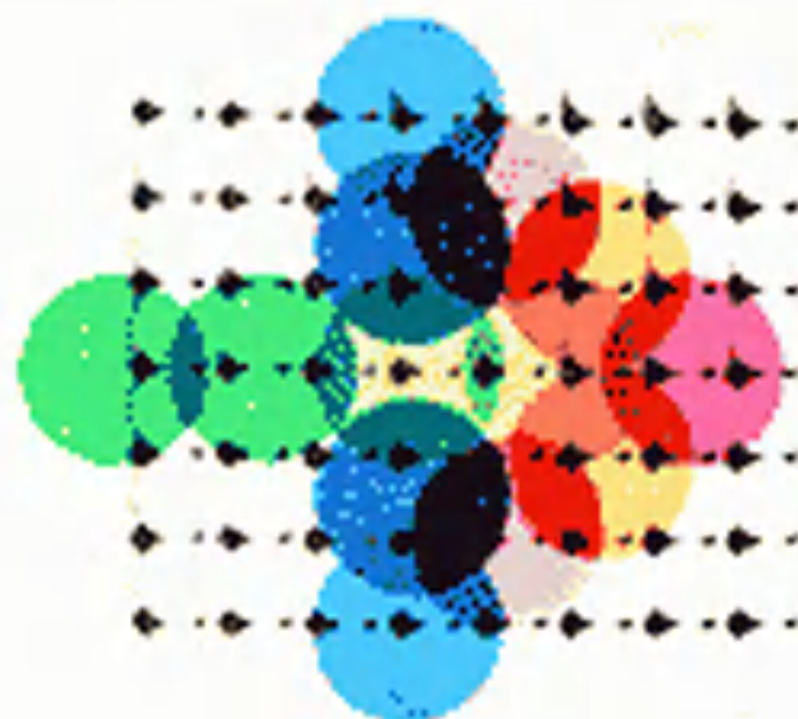


СЕРИЯ «ТЕОРИЯ СИСТЕМ»

ИНСТИТУТ СИСТЕМ

0000



А. Е. СЕТИНОВ

**ТЕНЗОРНАЯ
МЕТОДОЛОГИЯ
В ТЕОРИИ СИСТЕМ**

А. Е. ПЕТРОВ

ТЕНЗОРНАЯ МЕТОДОЛОГИЯ В ТЕОРИИ СИСТЕМ



МОСКВА
«РАДИО И СВЯЗЬ»
1985

ББК 32.81
П 30
УДК 512.972

Петров А. Е.

П 30 Тензорная методология в теории систем. — М.: Радио и связь, 1985. — 152 с., ил. — (Кибернетика).
55 к. 7550 экз.

Рассказывается о возникновении и развитии весьма перспективного научного направления, в котором сложные системы техники, физики, экономики и т. д. рассматриваются с единых позиций использования инвариантных измеряемых величин. Значение этого подхода чрезвычайно актуально в настоящее время в связи с резким увеличением сложности исследуемых и проектируемых систем. Тензоры оказываются именно тем каркасом, который связывает различные структуры сложных систем в единое целое.

Для инженерно-технических работников, специализирующихся в области теории систем.

П 1502000000-160 9-85
046(01)-85

ББК 32.81
6Ф7

РЕЦЕНЗЕНТЫ: ДОКТОР ТЕХН. НАУК, ПРОФ. В. А. ВЕНИКОВ, ДОКТОР ФИЗ.-МАТ. НАУК, ПРОФ. Г. А. ЗАЙЦЕВ, КАНД. ТЕХН. НАУК Г. Н. ПОВАРОВ

Редакция литературы по кибернетике и вычислительной технике

Андрей Евгеньевич Петров

ТЕНЗОРНАЯ МЕТОДОЛОГИЯ В ТЕОРИИ СИСТЕМ

Заведующая редакцией Г. И. Козырева

Редакторы Н. Д. Иванушко, Т. М. Толмачева
Художественный редактор Н. С. Шеин
Технический редактор А. Н. Золотарева
Корректор Н. В. Козлова

ИБ № 815

Сдано в набор 25.02.85. Подписано в печать 04.06.85. Т-11862.
Формат 60×84/16. Бумага ~~кн-журн.~~ ~~ИМ~~ Гарнитура литературная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 8,84. Усл. кр.-отг. 9,421. Уч.-изд. л. 10,16. Тираж 7550 экз. Изд № 19764.
Зак. № 711. Цена 55 к.

Издательство «Радио и связь», 101000 Москва, Почтамт, а/я 693

Московская типография № 4 Союзполиграфпрома
при Государственном комитете СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
129041, Москва, ул. Большая Переяславская, д. 46

© Издательство «Радио и связь», 1985

ВСТУПИТЕЛЬНАЯ СТАТЬЯ

В предлагаемой читателю книге «Тензорная методология в теории систем» сделана попытка решить очень нужную, но и не менее сложную задачу — доступного изложения работ американского ученого Г. Крона по тензорной теории сложных систем, и в первую очередь электрических систем. Работы Крона вызвали в свое время большие споры и серьезную, хотя и не всегда объективную и обоснованную, критику. Однако пройти мимо широко известных во всем мире работ Крона по сложным системам, связанным с теорией электрических цепей, невозможно. Эти работы, несомненно, оказали глубокое влияние на развитие многих областей знания и способствовали прогрессу в разработке методов решения системных задач с помощью цифровых вычислительных машин.

Книга представляет несомненный интерес для довольно широкого круга читателей, так как многие идеи Крона и полученные им результаты имеют весьма большое значение и могут быть применены для исследования систем самой различной физической природы. Однако метод изложения, принятый Кроном в его работах, не является популярным, и изучение его трудов даже у специалистов вызывает серьезные затруднения. В связи с этим простое изложение проблем тензорной методологии, которое в целом удалось автору настоящей книги, как нам кажется, должно представить интерес для широкого круга читателей.

Настоящая книга является весьма полезной и своевременной, поскольку в СССР не было издано ни одной работы, критически рассматривающей многочисленные научные труды Крона.

Книга состоит из трех глав. В первой дана общая характеристика применения тензорных методов в технике, во второй — рассматривается применение тензоров в электротехнике, далеко неполное. В этом однако, трудно упрекнуть автора, поскольку вопросы электротехнических приложений теории Крона могли бы составить самостоятельную работу.

Следует заметить и подчеркнуть, что Крон уделяет очень много внимания диакопике, т. е. исследованию сложных систем по частям. Этот метод рекомендуется им для исследований различных систем — от электрических до биологических. Сложная система по определенным правилам расчленяется и для подсистем строятся топологические модели. Для каждой подсистемы проводится анализ и отыскивается ре-

шение. Общее решение получается путем сочленения полученных частных решений с помощью аппарата тензорного исчисления. Метод оказывается удобным для непосредственного программирования и вычисления на цифровых машинах.

Методы Крона открывают широкие возможности для различных прикладных задач, применительно к которым Крон дает не только общий подход к решению, но и ряд приемов, обеспечивающих эффективность такого подхода. В исследовании сложных систем по частям существенно понятие двойственности и введение вспомогательных переменных для решения сложных систем уравнений. Это особенно эффективно, если эти переменные соответствуют цепи, которая является двойственной к основной цепи.

Весьма существенны в методе Крона так называемые обобщающие постулаты, позволяющие распространить приемы топологии и использовать обобщение для построения иерархии понятий.

Разработанные Кроном многие и интересные и глубокие в своей основе приемы, позволяющие повысить эффективность решения задач по частям, сопровождаются предложениями по использованию математических аппаратов топологии и тензорного анализа.

Все это вместе взятое создает базу для выработки комплексов методов исследования сложных систем, позволяющих решать многие прикладные и практические задачи.

Попытки разработать топологические и матричные методы для анализа электрических сетей делались и другими авторами, кроме Крона. Заслугой Крона явилось применение таких мощных методов, как метод тензорного анализа, сочетаемый с методами топологии. Для анализа цепей с активными элементами Кроном были начаты работы, которые были продолжены другими авторами и позволили анализировать практически все виды электрических цепей и сложных цепей другой неэлектрической природы.

Нужно подчеркнуть, что Крон первый применил топологические и матричные методы, хотя возможность их использования была указана Кирхгофом еще в начале XIX века. Дальнейший прогресс в этом направлении связан с именами А. Реза, Р. Сили и К. Валькенбурга.

Применительно к электрическим машинам матричные методы и приемы, предложенные Кроном еще в 30-х годах, стали получать все большее распространение. Крон, развивая работы А. Blondela, В. Дж. Гиббса, Н. Парка, составил уравнения обобщенной электрической машины. Эти уравнения, описывающие преобразование энергии, представляют собой систему дифференциальных уравнений, включающую уравнения напряжений и уравнения движений, и строятся на основе обычных представлений об идеализированной электрической машине с соответствующими допущениями. При этом используется теория двух реакций, от которой далее Крон делает переход к комплексным уравнениям метода вращающихся магнитных полей. Однако чисто формальное матричное преобразование Крона и отсутствие за-

конченного решения хотя бы одной задачи привели к тому, что длительное время этот метод не получал достаточно широкого применения.

Позднее инженерами было оценено предложение Крона об использовании матричного исчисления и теории линейных преобразований в развитии теории электрических цепей¹⁾.

Очень важно, что Крону удалось включить в рамки единой теории как единое целое рассмотрение неподвижных цепей и вращающихся электрических машин. Однако, как справедливо замечено Э. А. Мееровичем, нельзя согласиться с тенденцией Крона, что можно заменить изучение качественно различных электротехнических устройств со всеми их конкретными свойствами некоторыми математическими символами, используемыми в различных комбинациях. Нельзя согласиться с представлением Крона о том, что различные научные дисциплины отличаются не существом изучаемых явлений, а только применяемыми методами их исследования. Именно этот формальный подход вызвал критику работ Крона, в этой части в значительной мере справедливую.

Надо заметить, что Крон широко пользуется рядом преобразований, которые вводятся им без обоснования. Так, без обоснований вводится Кроном матрица соединения S^2 .

Интересным, но также сделанным без достаточного обоснования, является предложенная Кроном физическая интерпретация тензора кривизны Римана—Кристоффеля³⁾. Крон утверждает, что электрическая система будет устойчива при малых колебаниях, если возникающие в ней результирующие демпферные и синхронизирующие моменты положительны.

По мнению Крона общепринятые методы анализа устойчивости электрических систем не могут дать физической картины влияния различных частей электрической системы на статическую устойчивость. Для преодоления этого затруднения он предлагает воспользоваться тензорным уравнением качаний постоянно вращающихся с синхронной скоростью систем координат и соответствующей эквивалентной схемой замещения.

Составляя тензорное уравнение качаний, Крон показывает, что это уравнение соответствует тензору кривизны Римана—Кристоффеля. Он предлагает представить электрическую систему при качании такой схемой замещения, потери активной мощности в каждой части которой были бы равны создаваемому этой частью системы демпферному моменту, а потери реактивной мощности — синхронизирующему моменту. Крон утверждает, что получить такую схему в системе координат Блонделя-Парка невозможно. Он заявляет далее, что на основе развитых им теоретических положений было создано специальное устройст-

¹⁾ См. предисловие Э. А. Мееровича к кн.: Г. Крон. Применение тензорного анализа в электротехнике. — М.: Энергоиздат, 1955, с. 272.

²⁾ См. приложение Э. А. Мееровича к упомянутой выше книге Крона.

³⁾ См. журнал *Tensor*, 1955, v. 4, № 3, p. 150—172.

во, которое вместе с обычным регулятором возбуждения может компенсировать реактивное сопротивление генератора и обеспечить его полную устойчивость. Однако никакого описания такого устройства ни в этой работе, ни в последующих не появилось. Физическая же интерпретация происходящих процессов, приведенная в этой работе, не дала чего-либо нового и осталась в рамках общеизвестных положений.

Эта работа, вообще говоря, интересная по своей идее и вызвавшая дискуссию, является примером того, что Г. Крону были свойственны некоторые поспешные, недостаточно обоснованные высказывания. Однако было бы неправильным именно на них сосредоточивать внимание, опуская поистине огромное теоретическое и практическое значение работ Крона, которые вполне справедливо высоко оцениваются и о которых в достаточно популярной форме говорится в настоящей книге, рекомендуемой широкому читателю.

*Лауреат Ленинской премии, доктор техн. наук,
проф. В. А. ВЕНИКОВ*

ВОКРУГ ТЕНЗОРОВ КРОНА — ЗА И ПРОТИВ

Применение тензоров в теории электрических машин и, далее, в теории систем, сформировавшееся в тензорную методологию, тесно связано с именем Габриэля Крона. Важность его работ по применению тензорного подхода в теории систем была по достоинству оценена только с развитием вычислительной техники. Что касается разработки и применения им многомерных (полиэдральных) сетей для моделирования и исследования многомерных и нелинейных систем, к которым мы вернемся в последней главе, то их возможности во многом пока остаются загадкой. В самом деле, никто после Крона не опубликовал работ, которые бы объясняли существо и механизм «самоорганизующегося волнового автомата», возбуждаемого электромагнитными волнами. Крон применял такую многомерную модель, например, для регрессионного анализа многомерных экспериментальных данных. Опубликованные статьи содержат результаты расчетов с помощью такой модели, но не метод, которым эти результаты получены. Существование таких работ манит исследователя, как неразгаданные рецепты старых мастеров, ушедшие вместе с ними. Привлекает внимание и личность автора этих работ.

Габриэль Крон родился в 1901 г. в небольшом городке в Трансильвании¹. В 1921 г. он вместе с братом уехал в США, чтобы получить техническое образование. Учебу в Мичиганском университете закончил за четыре года (вместо пяти). Во время учебы зарабатывал на жизнь в качестве чернорабочего. По окончании университета два года работал под руководством известного тогда инженера Дж. Брансона — специалиста по индукционным двигателям. В 1926 г. Крон отправился в кругосветное путешествие, которое совершил за два года, останавливаясь для заработков на дальнейшую дорогу. Во время этого необычного путешествия, которое Крон описал в автобиографической книге «Путешествие вокруг мира и тензоров», он обдумал многое из того, что составило потом основы его теории. По возвращении в США Г. Крон работал в нескольких фирмах. Затем он уехал на два года на родину. В 1934 г. Крон поступил на службу в компанию «Дженерал электрик» (США), где работал до выхода на пенсию в возрасте 65 лет.

¹Трансильвания — область на севере Румынии — до 1918 г. входила в состав Австро-Венгрии.

Для своего времени его работы были неожиданным смелым внедрением новейших достижений математики в практику инженерных расчетов. Во многом эти методы были основаны на инженерной интуиции, не подкрепленной строгими доказательствами. Работы Крона вызвали острые споры и дискуссии. Математики обвиняли его в отсутствии строгости, а инженеры выражали сомнения в необходимости применения абстрактных понятий тензорного анализа в инженерно-технических расчетах.

С увеличением сложности систем применение инвариантных величин, тензоров, которые подобно каркасу связывают преобразование их структуры, стало все более необходимо. Работы Крона получили высокую оценку крупных ученых. Однако до самой смерти (1968 г.) Крон не получил признания тех, для кого работал, — инженеров, разработчиков сложных систем.

Время показывает, что для этого были как объективные, так и субъективные причины. К последним можно отнести проявления неприязни со стороны математиков, «элиты» электротехнического научного общества США, не ждавших признать научной новизны работ Крона. Многие его идеи и методы подвергались плагиату. История науки знает немало примеров подобного отношения к пионерам в той или иной области со стороны «хранителей традиций». Достаточно вспомнить судьбу Н. Лобачевского, первым взявшего на себя смелость заявить о существовании, помимо евклидовой, других геометрий, или О. Хевисайда, создателя операционного исчисления.

Это давний спор. Иные утверждают, что подобное отношение есть самозащита науки от проникновения различных лжеучений. Автор приводит ряд мнений о работах Крона как его защитников так и противников, которые отражают остроту споров вокруг тензорной методологии и составляют широкий спектр аргументов «за» и «против», помогая лучше осветить существо проблемы. Однако прежде чем их привести, немного коснемся существующих объективных трудностей распространения тензорной методологии.

Дело в том, что интуитивный характер теории, отсутствие строгого формального аппарата допустимы на первых этапах исследования новой области, но в дальнейшем это приводит к определенным сложностям. Эталонная теория метода Крона — тензорный анализ сетей — содержит противоречие, связанное с постулатом об инвариантности мощности, хотя расчеты этим методом, как ни странно, дают правильные результаты. Разрешить это противоречие мы пытаемся в гл. 2.

Для развития науки большое значение имеют научные дискуссии. Если их рассматривать на протяжении некоторого промежутка времени, то они дают интересный материал, имеющий не только познавательное, но и большое воспитательное значение. Горячие дискуссии в свое время вызвала и теория Крона как у нас, так и за рубежом. Сравним, что писали о теории Крона его современники, с тем, что говорят сейчас.

Ф. Эджер¹. «Человек, который умел прекрасно нарушать правила» [Alger Ph., 1969]:

Тридцать лет тому назад я впервые посетил город Рэгби и увидел мемориальную доску на стене игрового поля школы рэгби. Я был очарован надписью на ней и поэтому всегда цитировал ее друзьям. Надпись гласила:

«Этот камень напоминает о подвиге ВИЛЛИЯМА ВЕББА ЭЛЛИСА, который путем прекрасного нарушения правил футбола, по которым играли в его время, впервые схватил мяч руками и побежал с ним, положив тем самым начало игре в рэгби (1823 г.).»

Г. Крон был точно таким же человеком, как Эллис. Он «играл в жизнь» сильно и хорошо — и он прекрасно нарушал правила, которые устарели или были лишены смысла. Он разрушал признанные барьеры между высшими математическими дисциплинами и проектированием технических устройств и напрасны были протесты педантов, порицавших новый смысл, который он давал используемым словам. Так он создал целую область под

¹Известный американский электротехник.

названием «Диакоптика», обобщенную теорию электрических машин, и многие другие работы, которые теперь бесценны для тех, кто использует вычислительную технику для расчета больших систем. Его выводы и разъяснения часто были далеки от совершенства, но замечательная интуиция приводила его к правильным результатам.

Б. Говфман¹. «К методам и достижениям Габриэля Крона» [Нарр Н., 1973]:

Это честь чествовать Г. Крона. Спустя годы люди выразили множество мнений о его работе и эти мнения составляют широкий спектр. Не секрет, что нижняя граница этого спектра расположена за инфракрасной областью... Я не помещаю работу Г. Крона в эти темные нижние области. Напротив, я помещаю его работу в ярчайшую область. Правда, работа имеет неясности и промахи. Но я надеюсь показать, что эти неясности и промахи только усиливают ее величие.

Н. Винер. «Заметки о кроневской теории тензоров в применении к электрическим машинам» [Wiener N., 1936]:

Имеется два типа усовершенствований в науке: те, в которых некоторое развитие получает содержание научной информации, и те, в которых содержание по существу остается неизменным, но язык науки и его способность выражать сложные ситуации в сжатой форме... есть то, что является главным объектом развития.

...преимущества, достигаемые хорошим языком и хорошей символикой, суть:

- 1) стандартный метод постановки задачи;
- 2) метод выражения фактов задачи, который уничтожает случайный выбор координат;
- 3) иногда, но не всегда и даже не вообще, указание, как решать задачу.

Теория Крона вращающихся электрических машин является хорошим примером всего этого. Она не решает какую-нибудь специальную, еще не решенную задачу, но зато дает единый язык для формулирования большинства различных проблем.

П. Ланжевен. «Мысль и действие» (Доклад на собрании французского университетского союза 10 мая 1946 г.) [Ланжевен П., 1949]:

За несколько лет до второй мировой войны я участвовал в жюри, изучавшем и оценивавшим работы кандидатов на премию Монтефоре. Мы единогласно присудили первое место американскому инженеру Г. Крону, который показал, каким образом использование наиболее обобщенных геометрий и матричного исчисления, тесно связанного с тензорным исчислением, позволяет упростить и обобщить разрешение проблем электротехники, связанных с конструкцией и расчетом машин постоянного или переменного тока.

А. Душек, А. Хохрейнер². «Основания тензорного анализа в аналитическом представлении» [Duschek A., ...1949]:

Неприемлемым примером являются работы американского автора, который желает насильственно использовать тензорное исчисление в теории электрических сетей и машин и даже вводит такие понятия, как абсолютный дифференциал и тензор кривизны — и публикует толстые книги обо всем этом.

А. В. Берендеев [Берендеев А. В., 1950]:

На лиц, недостаточно знакомых с тензорным аппаратом математики и вместе с тем предрасположенных к низкопоклонству перед американскими сенсациями, статьи Крона произвели незаслуженное впечатление. Не были свободны от этого и некоторые отдельные ученые в СССР. Между тем, эти «научные работы» Крона представляют, по сущест-

¹Известный американский физик, сотрудник А. Эйнштейна.

²Немецкие математики.

ву, рекламу фирмы, «шефом» и, вероятно, акционером которой является Крон.

Нетрудно показать, что формулы тензорного исчисления в концепции, принятой Кроном, состоят, в основном, из нулей (!), некоторым из которых он ради вящей торжественности присваивает имя Кристоффеля.

...Введение Кроном в свои формулы символов Кристоффеля может быть объяснено только желанием придать этим формулам искусственную солидность с целью вызвать некритическое преклоение перед дутыми новинками американской «науки».

...Если же немножко поступиться деликатностью, то можно сказать, что «тензорное» исчисление Крона — это матричная алгебра, а все эти «символы Кристоффеля», «тензор кривизны», «тензор поля» и т. д. — не больше чем трескучие слова, призванные замаскировать скрывающиеся за ними нули.

Д. Л. Синдж¹ [Синдж Д. Л., 1947]:

Крон опубликовал в последнее время статьи и книги о приложениях тензорного исчисления к электротехнике, но так как я до сих пор не был в состоянии понять его точку зрения, я принужден оставить эти работы без комментариев.

Сам Г. Крон писал о своей новой теории [Крон Г., 1978]:

Когда автор в начале 30-х годов выступил с единой тензорной и топологической теорией вращающихся электрических машин и через несколько лет — с тензорной и топологической теорией неподвижных электрических сетей, он столкнулся с очень неприятной неожиданностью. В большинстве технических журналов совершенно непредвиденно новые понятия, введенные автором, были решительно объявлены ненужными или ошибочными. +1, -1, и 0-компоненты его «тензора соединения» С были осмеяны как «переработоспособные» или как «приносящие тензорам дурную славу» и т. д.

С другой стороны, ряд сотрудников Института перспективных исследований в Принстоне (О. Веблен, Н. Вейль, Джон фон Нейман) и несколько бывших сотрудников этого института (Б. Гоффман, П. Ланжевэн и др.) настойчиво советовали автору продолжать дальнейшие исследования. Даже Эйнштейн говорил автору, что он знает от своих сотрудников о его работах (поскольку последний использовал в практических задачах эйнштейнову нериманову динамику общей теории электрического и гравитационного полей). Мнения авторитетных ученых не имели ничего общего с крайне вздорными высказываниями этой группы инженеров.

В. А. Веников, П. А. Ионкин, Г. Н. Петров, И. П. Копылов [Веников В. А. [1969]:

Работы Г. Крона, впервые опубликованные в 1934 и 1939 гг., положили начало широкому внедрению в электротехнику методов топологии, использующей математический аппарат тензорного и матричного анализа, а также дифференциальной геометрии многомерных пространств. Г. Крону принадлежит заслуга распространения идей теории относительности Эйнштейна в область технических наук.

...Теоретическое и практическое значение методов, разработанных Г. Кроном, постоянно растет, что нашло отражение в периодической печати СССР в ряде публикаций, развивающих различные стороны его теоретического наследия.

Л. К. Кирчмайер². «Достичь звезд» [Alger Ph., 1969]:

¹Немецкий математик, известный специалист по тензорному анализу.

²Американский ученый, специалист по системотехнике.

Во многих случаях, однако, результаты Крона опережали время на десять—двадцать лет. В некотором отношении является трагедией то, что многие разработки Крона были не поняты и не оценены большей частью технического и научного общества при его жизни.

Дж. Дж. Диксхорн и Ф. Дж. Эванс¹ «Физическая структура в теории систем» [Physical Structure..., 1974]:

Никакой обзор работ по моделированию сетей не может быть полным без имени Г. Крона, так как широкое применение его метода подтверждает, что сеть как полезное рабочее понятие далеко не исчерпано. Довольно очевидно, что базовая теория и более сложные структуры, построенные вокруг первоначальной кроновской машины и моделей цепей, будут становиться все более важными, особенно в отношении пространственно-распределенных непрерывных систем... Его оригинальные модели цепей вновь подчеркивают неразделимую природу законов Кирхгофа и уравнений поля Максвелла. Он предложил новый подход к анализу цепей кусочным методом, названном им «Диакоптика» и довольно необычное использование тензорного исчисления, которое позволило ему применять понятия преобразования, группы и инвариантности. Крон был среди первых, кто продемонстрировал инженерные применения комбинаторной топологии и дифференциальной геометрии. Наиболее замечательным фактом является то, что одно понятие может обеспечить единую структуру таких на первый взгляд различных проблем, как... теория рассеяния, оценки наименьших квадратов, линейное оптимальное управление и фильтры.

Н. В. Баласубраманиан, Дж. В. Линн², Д. П. Сен Гупта. «Дифференциальные формы на электромагнитных сетях» [Balasubramanian N., 1970]:

... С точки зрения Крона тензор более не является тензорной величиной с компонентами, определяемыми локальными координатами. Для компонент тензоров Крона координатами являются пути и катушки цепей. Хотя использование им тензорного исчисления не было традиционным, справедливость этого была подтверждена профессиональными физиками и математиками.

В. Г. Афанасьев [Афанасьев В. Г., 1981]:

Для изучения сложных систем... нужен комплекс методов. Создание этого комплекса методов имеет актуальное не только научное, но и практическое значение, особенно в связи с широким использованием электронно-вычислительной техники, автоматизацией экспериментальных исследований, с разработкой и проектированием сложных систем и управления ими, а также, и прежде всего в связи с организацией управления производством, обществом на всех уровнях. Диакоптика Г. Крона занимает достойное место в системе этих методов.

Полный список публикаций Г. Крона (5 монографий и свыше ста статей) приведен в сборнике статей, посвященных анализу его работ, под редакцией Х. Хэппа, ученика и сотрудника Крона. [Happ H., 1973].

¹Редакторы первого сборника статей по применению графов связи.

²Дж. В. Линн — английский физик, специалист по применению тензоров для расчета электрических машин.

ВВЕДЕНИЕ

Появление теории систем во многом является реакцией на усилившуюся в наше время специализацию науки вообще и ее технических областей особенно. Теория систем — это попытка связать воедино накопленные знания. Написано много книг по общей теории систем, где в качестве основы используются самые различные подходы: имитационное моделирование на ЭВМ, моделирование на аналоговых машинах, различные аналитические методы, сетевые модели, модели на основе графов связей, алгебраические и теоретико-множественные методы и др.

Эта книга посвящена применению тензорных методов в теории систем, объединенных под общим названием тензорной методологии. Роль тензорных методов сформулирована в книге акад. В. Г. Афанасьева «Общество: системность, познание и управление»: «...Тензорный анализ позволяет отделить субъективное в изучении явления, связанное с позицией ученого, с выбором той или иной системы координат, от объективного, объективной реальности, которая не зависит от точки зрения, от системы координат» (с. 165).

Первоначально тензорный анализ, разработанный в XIX в., назывался «абсолютным исчислением». Его основная задача заключалась в том, чтобы избавиться от громоздких преобразований проекций геометрических объектов при изменении системы координат так, чтобы производить действия непосредственно с самими объектами.

Наличие объекта (тензора) вне систем координат приводит к тому, что при изменении системы координат его проекции преобразуются по определенным (линейным) законам. Наличие такой формулы преобразования позволяет говорить, что разные наборы чисел (относящихся к разным координатам) представляют один и тот же объект. Кроме того, и это для нас важно, имеется возможность знать проекции только в одной системе координат и без *нового проектирования* определять проекции того же объекта в любой другой системе по формулам преобразования координат друг в друга — это главное свойство тензорного метода, позволяющее применять его в теории сложных систем.

Исследование, расчет и проектирование сложных систем стало одной из новых проблем современной науки. Под сложными системами понимают крупные производственные, технологические, информационно-вычислительные комплексы, крупные физические, технические, экономические, биологические, экологические системы, охватываю-

щие объекты и процессы в больших масштабах в своей области, а также связь различных областей.

Само перечисление показывает, что многообразие тех объектов, которые называют сложными системами, столь велико, что трудно найти между ними что-то общее кроме их сложности. Искать, однако, необходимо, поскольку сложность систем как по количеству элементов и связей, так и по процессам непрерывно возрастает. В то же время накопленный опыт разработки таких систем показывает, что установилось мнение об индивидуальности каждой сложной системы, необходимости разрабатывать для нее заново теорию, методы расчета и проектирования. Это снижает эффективность разработок, не позволяет использовать уже полученные результаты при разработке новых систем.

Тензорная методология предназначена как раз для того, чтобы получить единый подход к исследованию сложных систем различной природы. Ее основные особенности следующие.

1. Использование аналогий по структуре и протекающим процессам в различных системах. Это позволяет разделить на классы те системы, которые имеют такие аналогии, и рассматривать все системы из одного класса как некоторые проявления (как бы проекции в частные системы координат) одной, абстрактной, обобщенной системы. Если рассматривать обобщенную систему как тензор, а конкретные системы этого класса — как ее проекции в частных системах координат, то можно использовать главное для тензорного метода, о чем говорилось выше. А именно: надо выбрать одну систему и использовать ее в качестве «эталонной» системы координат, а описания (уравнения) других систем приводить к описанию в терминах этого эталона (моделировать). Конечно, для эталона должны быть хорошо разработаны как теория, так и методы расчета, проектирования. Тогда можно их использовать для тех систем, модели которых построены. Можно также надеяться расширить понятийное содержание исследуемой системы за счет более развитых понятий эталона.

2. В качестве эталона желательно в каждом классе использовать такие системы, для которых разработаны тензорные методы расчета. Такие методы разработал известный американский ученый и инженер Г. Крон (1901—1968) для электрических сетей (цепей) и электрических машин. Тензорный анализ сетей можно взять за основу построения эталона для моделирования сложных систем. Уравнения других (не электрических) систем для моделирования их в терминах эталона необходимо приводить к тензорному виду. Г. Крон заложил основы применения тензорного метода для исследования различных сложных систем.

Сразу возникает как минимум два вопроса. Во-первых, а почему надо использовать электрические цепи, чем они, собственно, лучше любых других? Во-вторых, само упоминание о тензорах предполагает, что есть пространство и системы координат в нем, иначе нельзя гово-

ритель о формулах преобразования при изменении системы¹ координат. Что это за пространство? Каковы его свойства?

Эти вопросы связаны между собой. Попыткой ответить на них является данная книга. Возможность полного ответа ограничена не только небольшим объемом, но и недостаточной ясностью существующих ответов. В конце концов можно сказать, что это — развивающееся направление, хотя оно имеет уже свои признанные результаты. Здесь автор позволит себе лишь несколько замечаний, которые, возможно, несколько прояснят суть дела. Как уже отмечалось, любая сложная система — это структура связанных элементов плюс процессы, протекающие в этой структуре. Этим мы очерчиваем круг рассматриваемых систем. Элементы структуры образуют пути (замкнутые и разомкнутые); сами элементы могут быть точками, отрезками линий, плоскостями, объемами и т. д. Процессы протекают в этих путях в виде *потоков* одних величин под действием других величин.

Свойства и законы структур изучает для одномерных ветвей (отрезков) теория графов, а в более общем, многомерном виде — комбинаторная топология. Процессы, в которых объединяются потоки воздействия и откликов, возникающие при этом метрические отношения — это, скорее, предмет теоретико-множественной топологии, дифференциальной геометрии. Не существует на сегодня математического аппарата, объединяющего одновременно структуру и метрику.

Пути, группы гомологий, комплексы комбинаторной топологии не имеют метрических размеров. Дифференциальные формы не образуют структуры. В этом отношении электрическая цепь как эталон для моделирования других систем имеет преимущества. Главное заключается в том, что теория расчета такой системы, как электрическая цепь, рассматривает уравнения как процессов, так и структуры *одновременно*. Методы расчета цепей, включая тензорные методы, разрабатываются на протяжении полутора веков и достигли высокого уровня.

Процессы прохождения тока в электрической цепи описываются хорошо известным законом Ома (и его обобщениями). Структура цепи (контуров и узлов) описывается не менее известными законами Кирхгофа (с них началась комбинаторная топология!).

Теперь о пространстве. В отличие от однородного непрерывного пространства геометрии мы будем рассматривать пространство-структуру, которое состоит из элементов, образующих структуру системы, и поэтому дискретно. Пространство электрической цепи образуют ветви. Наборы проходящих по ветвям независимых замкнутых и разомкнутых путей используются как системы координат. Изменение структуры или другой выбор путей рассматривается как преобразование координат.

¹Термин «система», к сожалению, многозначен даже в научно-технических применениях. Нам постоянно придется различать понятия «сложная система» и «система координат».

Идеи тензорной методологии реализуются и в построении тензорного анализа сетей. Набор ветвей рассматривается как обобщенная цепь, а любое их соединение в структуру — как проекция обобщенной цепи в частной системе координат. Тензорные формулы преобразования величин цепи при изменении ее структуры позволяют результаты расчета одной простейшей цепи использовать для расчета других цепей. В качестве простейшей используется цепь из отдельных, несоединенных элементов, играющая для тензорного анализа сетей роль своеобразного эталона.

Таким образом, цепь есть проекция по отношению к обобщенной системе, а по отношению к конкретным цепям эта же цепь есть тензор. Тензорный анализ сетей представляет собой достаточно формализованную теорию, его методы расчета, представленные в матричной форме, можно, например, реализовать на ЭВМ.

Тензорная методология в применении к сложным, особенно неэлектрическим системам далека от полной формализации, поскольку построение эквивалентной модели в виде цепи или другой системы остается еще больше искусством, чем наукой. Процесс установления аналогий процессов и структуры различных систем требует эрудиции, интуиции разработчика и нуждается в автоматизации и формализации. Он открывает путь построения единой картины нашего специализированного мира, следовательно, путь к повышению эффективности процесса его преобразования.

Цель этой небольшой книги — обратить внимание читателя на существование этого пути. Следовать, однако, по этому пути непросто, поскольку большинство читателей мало знакомо с тензорами: курсы по применению тензорных методов для проектирования электрических и электромеханических систем читаются для отдельных специальностей в немногих вузах, а применение этих методов в теории сложных систем практически не преподается.

Поскольку для понимания перспектив весьма важно знать историю, то в гл. 1 дается обзор технологии применения тензорного метода и обсуждаются первые попытки применения тензорных методов для анализа и расчета электрических машин.

Вторая глава посвящена основным понятиям тензорного анализа на пространствах-структурах, ковариантности и контравариантности, метрического тензора, двойственности и ортогональности в применении к электрическим цепям. Обнаруженная неизвестная ранее закономерность в распределении потоков энергии при изменении структуры электрических цепей позволяет обосновать тензорные формулы преобразования и по-другому подойти к постулату об инвариантности мощности Крона.

Третья глава посвящена применениям тензорной методологии. Рассмотрены примеры исследования физических, технических, экономических систем. Подробно прослежена технология применения этой методологии для анализа и расчета важной экономической задачи балан-

сового планирования начиная от приведения уравнений баланса продуктов к тензорному виду, построения модели и кончая расчетом по частям методом диакоптики, поиском новых понятий и закономерностей в экономике по аналогии с понятиями в электрической цепи.

Рассмотрены также перспективы применения многомерных (полиэдральных) сетей в качестве эталонов для исследования нелинейных и многомерных сложных систем.

Нужно отметить, что пионером тензорной методологии исследования сложных систем является Г. Крон и его непосредственные ученики. В СССР это направление развивалось под руководством А. А. Андропова. Так, например, тензорные методы в области расчета задач электромеханики развивали советские ученые А. В. Гапонов-Грехов, В. А. Веников, И. П. Копылов, И. В. Кузина и др. Разбору философских и методологических проблем посвящены работы П. Г. Кузнецова. О важности этого направления говорится и в цитированной выше работе В. Г. Афанасьева.

Работы по исследованию сложных экономических систем по частям методом диакоптики выполнены (под руководством Л. Т. Кузина) автором этой книги.

Отзывы о книге просим направлять по адресу: 101000. Москва, Почтамт, а/я 693. Издательство «Радио и связь».

Глава 1.

ТЕНЗОРЫ ПРОНИКАЮТ В ТЕХНИКУ

1.1. ТЕНЗОРЫ, СИСТЕМЫ И АНТИЧНЫЕ СТАТУИ

Развитие производства, науки и техники XX в. приводит к созданию все более и более сложных систем. Огромных масштабов достигли производственные, технологические комплексы; информационные системы, вычислительные комплексы, банки данных, системы управления, регулирования; электроэнергетические сети и системы; растут масштабы и сложность управления в экономических системах.

С ростом сложности систем возникают две основные трудности:

1. Из-за масштабов трудно производить действия с такими системами (расчет, проектирование, управление), предвидеть последствия тех или иных изменений, оптимизировать работу систем и т. д. Большое разнообразие элементов системы, а также связей между ними затрудняют применение вычислительной техники. Дело не только в недостаточной памяти или быstroдействии современных ЭВМ (улучшение этих параметров, вообще говоря, опережает рост сложности проектируемых систем). Дело в том, что количественный рост систем порождает и качественные изменения, не до конца исследованные и понятые. Точного научного определения, что считать сложной системой, на сегодня не существует. Сложность связывают с числом и видами составляющих систему элементов и связей, отношений между ними.

2. Исследование и разработка каждой сложной системы требует больших затрат ресурсов, привлечения больших коллективов разработчиков.

Использование же достигнутых результатов при новых разработках стало практически невозможным, поскольку разнообразие природы и типов сложных систем породило тенденцию считать их несопоставимыми, уникальными. Общим для таких систем считается только их сложность¹. Для каждой системы разрабатываются свои методы исследований и расчетов, что значительно снижает общую эффективность, тем более, что объемы расчетов возрастают пропорционально третьей степени размеров системы.

¹О методах подоби́я и моделирования в электроэнергетических системах м. книгу [В. А. Веников, Г. В. Веников, 1984].

Оказывается, однако, что с ростом сложности систем растет роль таких характеристик, которые во многом являются общими для разных систем. Это позволяет получать и использовать аналогии между системами различной природы как по структуре, так и протеканию процессов в этой структуре.

Главная проблема в разрешении этих трудностей заключается в том, что необходимо разработать единый способ представления и описания физических, технических, экономических и других сложных систем. Создание единого языка описания необходимо, иначе дальнейшему возведению здания современной науки и техники может грозить судьба Вавилонской башни. Это гигантское сооружение, по преданию, хотели построить, чтобы подняться на небо. Для этого сигналы много строителей из разных стран, но они не понимали языка друг друга. Не понимая друг друга, они не смогли объединить свои усилия, строительство прекратилось прежде, чем возникли технические трудности, и мы никогда не узнаем, чем могло бы завершиться это грандиозное предприятие. Как бы там ни было, в конце концов всякая грандиозная попытка чего-то прокладывает путь к успеху, даже если сама она заканчивается неудачей. Как же объединять разнородные системы? Что в них общего? Мы немного продвинемся в понимании этого, если заметим, что во всех системах в том или ином виде происходят процессы преобразования материи, причем эти процессы происходят и повторяются многократно в различных частях систем. Выделив наименьшую часть системы, в которой еще продолжает в полном объеме происходить характеризующий эту систему процесс, мы можем считать эту часть элементом системы, а всю систему—состоящей из этих элементов. Процессы в элементах разных систем могут быть похожи, скажем, описываться одинаковым числом параметров, подчиняться подобным друг другу уравнениям и т. д.

Далее примем во внимание, что сложная система состоит из многих элементов, соединенных друг с другом. Соединения, связи могут быть различны по типу, сложности, количеству. Таким образом можно сказать, что в сложных системах процессы образуют структуру. Какие аналогии возможны между структурами систем различного типа? Во-первых, аналогии между размерностью элементов. С геометрической точки зрения элементы могут быть точками, одномерными линиями, двумерными поверхностями, трехмерными объемами, а при более абстрактном рассмотрении также и многомерными элементами. Можно, следовательно, классифицировать системы по размерности элементов или их комбинаций. Во-вторых, соединения, последовательности элементов образуют пути в структуре. Пути могут быть замкнутые и разомкнутые; их размерность определяется размерностью элементов.

Итак, мы наметили два пути поиска аналогий между системами — процессы и структура. Предположим, удалось подобрать группы, совокупности различных систем, аналогичных по типу процессов, раз-

мерности элементов и структуре, образуемой ими. Чем это поможет в разрешении указанных в начале главы трудностей?

Первое, что приходит в голову, — это попытаться использовать полученные уже результаты для одних систем при разработке других систем. Для этого необходимо подробно разработать теорию, методы расчета, проектирования, управления какой-нибудь одной системы, а затем, используя аналогии процессов и структуры, получать результаты для остальных систем этой группы с помощью каких-нибудь стандартных преобразований.

Наличие аналогий, позволяющих сравнивать разные системы, говорить об их сходстве и различии, заставляет задуматься, а не являются ли эти системы различными проявлениями чего-то для них единого, скажем, некоторой абстрактной, обобщенной системы, подобно тому, как разные конкретные яблоки при всем различии их цветовых, вкусовых и других характеристик все же являются конкретными проявлениями понятия «яблоко».

Мы уже подошли, случайно или сознательно, к технологии применения тензорного метода в теории систем. Рассмотрим пример, который даст нам некоторые наглядные аналогии.

Представим себе реальный физический объект, например античную статую. Чтобы сохранить изображение подверженного разрушению предмета для будущего, а также для реставраций, сфотографируем ее с разных точек. Все фотографии окажутся разными, но, глядя на них, мы убеждаемся, что они изображают одно и то же. Можно сказать, что статуя — это некоторый геометрический объект, а фотографии — его проекции в различные «системы координат». Даже не видя статуи, а только сравнивая фотографии, мы можем сделать вывод, что видим один и тот же предмет.

Конкретизируем ситуацию. Пусть перед нами статуя Венеры Милосской. Известны и другие скульптурные изображения этой мифологической богини. Все они суть конкретные реализации образа Венеры. Можно сказать, что образ — это геометрический объект, а различные статуи — его проекции в «системы координат» — конкретные образы и статуи, порожденные воображением скульпторов. В отличие от первого случая здесь сам объект не существует, поскольку богиня — миф, реально ее никто никогда не видел. Каждая статуя — это лишь конкретное воплощение образа, фантазии конкретного скульптора. Несмотря на это, разбирающийся в искусстве человек по ряду признаков определит, кого изображает статуя. Опытный искусствовед и по фотографии скажет, кто изображен и кто автор статуи.

Если же обнаружена неизвестная статуя, то ее, очевидно, надо сравнить с одной или несколькими другими известными статуями. Тогда среди всего многообразия персонажей мифологии можно выделить группу, класс похожих на исследуемый объект, а затем по более тонким признакам точно установить принадлежность.

Теперь рассмотрим более современные объекты — множество сложных систем. Наш подход к ним во многом будет похож на только что описанный. Сначала мы должны разделить все системы на классы систем, имеющих аналогии по процессам и структуре. Системы одного класса будут соответствовать разным скульптурным изображениям одного образа.

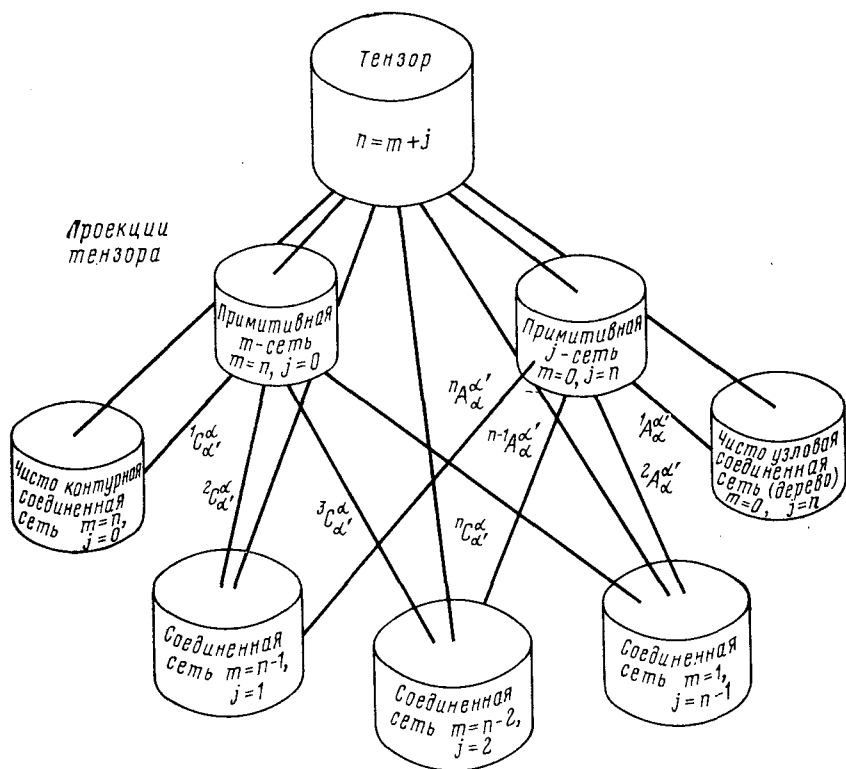


Рис. 1.1. Схема тензорного метода расчета электрических сетей.

Совокупность из n ветвей рассматриваем как тензор. Соединения этих ветвей, образующие структуру конкретных сетей, рассматриваем как проекции тензора в системах координат, заданных путями в сети

В каждом классе выберем одну из систем в качестве эталона и будем с ним сравнивать остальные системы, т. е. выражать их описания в терминах эталона — моделировать. Для самой эталонной системы должна быть разработана своя теория, в которой система определяется обобщенно набором элементов, а все соединенные из них различные структуры рассматриваются как ее проекции в разных системах координат. При этом должна быть разработана группа стандартных пре-

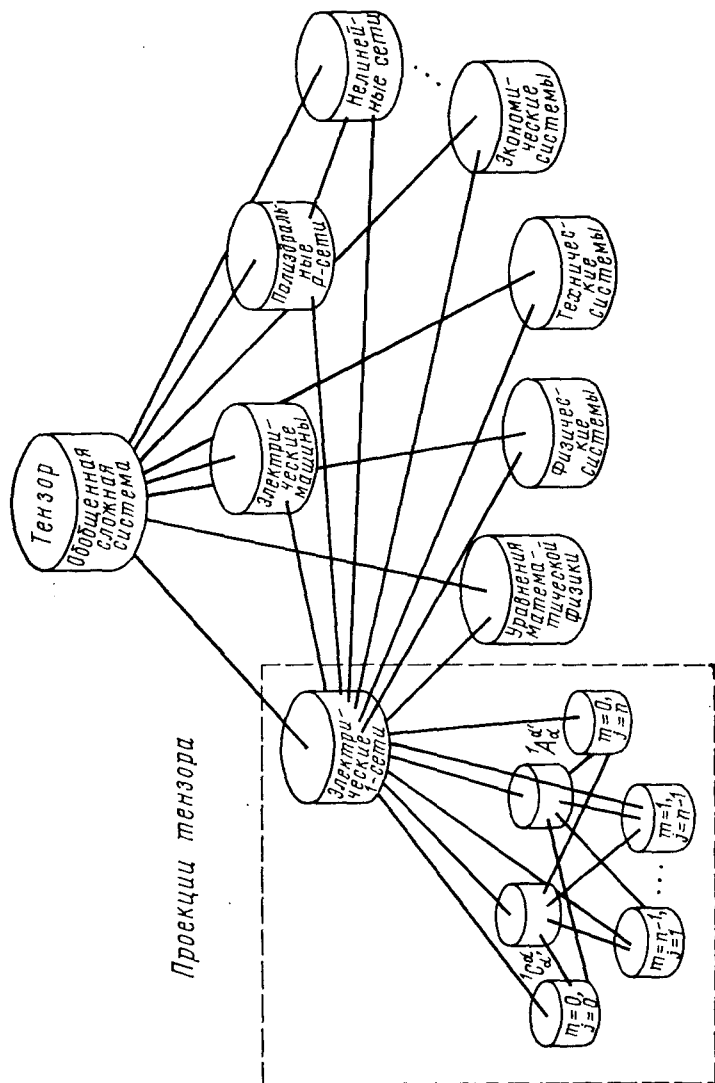


Рис. 1.2. Схема тензорной методологии исследования сложных систем.

Абстрактную обобщенную систему рассматриваем как тензор, технические, физические, экономические системы, обладающие аналогичными по структуре или протекающим в ней процессам, — как проекции этого тензора, а электрическую сеть как простейшую систему координат.

образований, позволяющая по результатам расчета одной (желательно наиболее простой) структуры получать результаты расчета любой другой структуры, соединенной из тех же элементов (рис. 1.1).

Получаем два уровня. На первом эталонная система служит для представления других систем, реализующих обобщенную, подобно тому, как разные скульптуры по-разному реализуют один образ. На втором уровне эталонная система сама служит в качестве обобщенной, а роль эталона играет одна простейшая структура, состоящая, скажем, из несоединенных элементов. Здесь разные структуры аналогичны разным фотографиям одной статуи, среди которых одна выбрана в качестве эталона (рис. 1.2).

Итак, с помощью такого метода мы, казалось бы, решили все проблемы и теперь можно брать любую сложную систему и действовать автоматически: приводить ее описание к описанию в терминах какой-нибудь эталонной, производить расчет, проектирование, исследование на полученной модели;

вернуться в исходное положение, т. е. от результатов, полученных на модели, перейти к результатам для требуемой системы.

Однако не тут-то было. Сложные системы не зря получили свое название и прослыли индивидуальностями. Найти в них нечто общее, кроме их сложности, представить их как разные проявления чего-то единого, позволяющего их сравнивать — в этом и состоит одна из главных проблем.

1.2. ОТКУДА ВзяЛИСЬ ТЕНЗОРЫ

Могут ли помочь в разрешении этих проблем тензоры? Надо ли их использовать в теории сложных систем и в чем их преимущества? Если надо, то чем такие тензоры отличаются от обычных, известных в математике? Что такое, наконец, вообще тензоры и откуда они взялись? На первые два вопроса мы ответим положительно. Оказывается, что тензорное исчисление возникло в математике для решения проблем, методологически аналогичных тем, которые мы рассматриваем. Чтобы убедиться в этом, проследим происхождение тензорных понятий, тогда мы получим ответы и на последние два вопроса.

В XIX в. математики стали рассматривать системы функций с определенными законами преобразования. Функции, которые при изменении системы координат преобразуются по линейному закону, Эйштейн в 1916 г. назвал *тензорами*. Благодаря успехам теории относительности это название стало общепринятым.

Таким образом, понятие тензора связано с преобразованием систем координат. Оказывается, оно является закономерным развитием представлений о пространстве. Чтобы понять, как математики пришли к тензорам, рассмотрим эволюцию этих представлений.

Ученые Древней Греции называли пространством, по-видимому, то место, в котором можно передвигать тела и сравнивать их друг с дру-

гом, т. е. некую пустоту, противопоставленную окружающему наблюдаемому миру. Возможные действия над телами при этом ограничены.

Со временем возникла и стала развиваться аналитическая геометрия. Декарт придумал свою декартову систему координат и стали сравнивать не сами тела, а численные значения их проекций на оси координат. Согласитесь, сравнивать замеры египетских пирамид проще, чем накладывать пирамиды друг на друга по правилам геометрии Евклида.

Линии координат, состоящие из точек, можно провести в любом месте и направлении пространства. Равноправие систем координат приводит к мысли, что пространство есть совокупность точек и заполнено ими полностью, равномерно и одинаково во всех направлениях, так что между любыми двумя точками их еще бесконечное количество. Говорят, что при написании своей книги «Основания геометрии» Д. Гильберт не предполагал полного заполнения пространства точками, следовательно, его геометрия, возможно, пригодна и для дискретного пространства.

Взгляды на пространство стали изменяться с появлением неевклидовых геометрий, когда стала привычной мысль о существовании многих различных геометрий вообще. Поскольку геометрия — это, в основном, теория пространства и каждому типу геометрии соответствует свое пространство (евклидовой — евклидово, римановой — риманово и т. д.), то возникает вопрос, а чем же отличается совокупность точек — пространство — для различных геометрий?

Сначала различие между пространством проводилось по допустимым преобразованиям над объектами, при которых сохраняются, остаются инвариантными те или иные свойства. Так классифицируются геометрии в соответствии с эрлангенской программой Ф. Клейна, которую мы рассмотрим в гл. 2.

Но в эту схему не укладываются геометрии Лобачевского, Римана и подобные им. Пространство этих геометрий в принципе отличается от пространства других геометрий, типа евклидовой. Отличие заключается в том, что появляются иные «связи», отношения между точками. Это проявляется в том, например, что линии, построенные из точек в евклидовом и римановом пространствах, обладают разными свойствами. Линии риманова пространства, удовлетворяющие определению «прямых линий», соответствуют кривым линиям в евклидовом пространстве.

В качестве примера вспомним геодезические линии на земном шаре, представляющем двумерную модель риманова пространства. Это кратчайшие линии между точками земной поверхности, но только в приближении их можно считать «прямыми» в смысле геометрии Евклида.

Поэтому со времен Лобачевского и Римана пространство начали рассматривать как множество точек, обладающих структурой. Это позволило сблизить понятия самого пространства и объектов, в нем рас-

положенных. Применение этой идеи позволило в общей теории относительности установить, что невозможно рассматривать физические тела сами по себе безотносительно к пространству — времени, в котором они расположены.

Дальнейшее развитие представлений о пространстве, связанное с ростом роли структуры, имеет непосредственное отношение к нашему предмету. Пространство становится дискретным, а структура отношений между точками выступает более наглядно и представляется соединенным тем или иным образом линиями, плоскостями, в общем случае многомерными объемами, которые в совокупности составляют такое пространство. Свойства пространств-структур являются предметом раздела современной математики — комбинаторной топологии.

Такое пространство представляет для нас интерес потому, что оно подходит для представления единым образом особенностей различных систем. Многочисленные элементы и связи между ними, составляющие структуру систем, трудно представить в виде однородного пространства. А дискретное пространство, для которого структура связей его элементов является существенной характеристикой, больше подходит для моделирования, для выбора такой структуры пространства, которая соответствует структуре исследуемой системы. Можно сказать, что его устройство больше похоже на то, как устроены различные реальные — технические, экономические, физические и другие — системы. Например, системы, представляющие собой совокупность путей потоков энергии или других величин, характеристики которых можно представить объектами пространства-структуры. Исследование, расчет, проектирование таких систем можно представить как преобразования объектов этого пространства. При этом возникает *проблема инвариантов*, т. е. вопрос, что считать неизменным при преобразованиях таких пространств и представляемых им систем. Например, при разработке расчета электротехнических систем, величины которых представлены как объекты пространства-структуры, оказалось необходимо предположить инвариантность мощности, т. е. потока энергии, характеризующего ее, при разрывании и соединении связей между элементами. Возникающие при этом проблемы рассматриваются в гл. 2. Сейчас нам важно понять — откуда геометрически возникает проблема инвариантов, т. е. в данном случае — величин, объектов, свойств, которые не изменяются при преобразованиях, т. е. изменении тех или иных характеристик.

Интуитивно понятно, что хорошо, когда есть нечто, остающееся неизменным, постоянным при различных переменах. На это можно опереться, что дает ощущение надежности, уверенности.

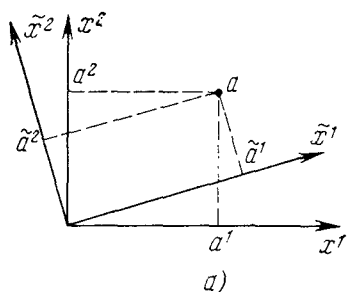
В данном случае интерес особый, связанный с той эволюцией понятия пространства, которую мы рассмотрели. Аналитическая геометрия имела свои преимущества, но она и породила новые проблемы, из которых для нас наиболее существенна проблема преобразования координат. Скажем, мы выбрали одну систему координат, записали в

ней значения проекций интересующих нас объектов, а затем пришлось изменить эту систему координат, перейти к другой. Нашим объектам в новой системе координат соответствуют другие наборы чисел. Надо ли снова строить и измерять проекции или можно их получить по старым проекциям, а также информации о связи старой и новой систем координат?

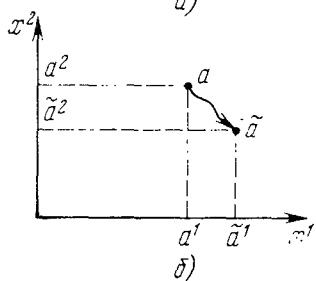
Или, например, мы имеем два набора чисел в разных системах координат. Как определить, соответствуют ли они какому-то одному объекту или нет?

А можно задать вопрос и так: пусть есть два набора чисел, которые представляют собой проекции одного объекта. Что правильнее, рассматривать эти наборы чисел как проекции этого неподвижного объекта в разных системах координат или же считать, что система координат одна, но различие проекций показывает, что сам объект переместился в другое место?

Начнем с конца. Обе точки зрения математически равноправны¹. Вы-



а)



б)

Рис. 1.3. Две точки зрения на преобразование координат:

а — пассивная: объект (точка a) неподвижен, меняется система координат; б — активная: система координат неподвижна, меняется (движется) сам объект — точка a

бор одной из них на первый взгляд представляется делом вкуса. Мы выбираем первую и будем далее ее придерживаться, т. е. будем считать, что изменение значений проекций объекта соответствует преобразованию координат, а сам объект неподвижен и при преобразовании не меняется. Причина в том, что для физики, а также и для теории систем развитие такого подхода, связанное с наблюдениями и измерением результатов наблюдений, имеет большое значение. Наблюдения обычно связаны с измерениями, показывающими, как изменяются те или иные характеристики изучаемого объекта. Не всегда можно производить измерения непосредственно на самом объекте. Поэтому вводится некоторая система координат, иногда довольно сложная, и характеристики объекта измеряют по проекциям объекта в эту систему координат.

¹В математике первая точка зрения на преобразование координат называется пассивной, вторая — активной. При построении тензорного анализа выбирается пассивная (см. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике, 1977, с. 414).

Объект, который не изменяется относительно преобразований пространства, систем координат в нем, называется *инвариантом*. Его проекции могут быть различны, но сам он не меняется. Зная проекции, можно отвлечься от самого объекта и наблюдать его изменения только по изменениям проекций. Часто это оказывается единственным способом наблюдения. В качестве осей координат можно рассматривать не только пространственную линию, но и, например, шкалу прибора: термометра, вольтметра, амперметра, барометра и т. д. Но все же цель исследования, — сам объект, а не его проекции. А координаты, как видим, вносятся в описание наблюдателем и не играют сами по себе роли в существе рассматриваемых явлений. Другими словами, наблюдаемые объекты ничего не знают о тех системах координат, которые мы используем. (И не должны знать, поскольку наблюдение не должно затрагивать самого наблюдаемого явления.) Поэтому желательно описывать явления так, чтобы от описания в одной системе координат можно было переходить к описанию в любой другой системе координат.

Изменения координат могут быть связаны с положением наблюдателя, сдвигом начала координат, изменением масштаба измерений; наконец, возможны повороты, изменения направления осей координат. При таких преобразованиях необходимо знать: во-первых, закон преобразования координат, во-вторых, проекции объекта в исходной и полученной системах, причем с уверенностью, что эти проекции относятся к одному и тому же объекту. Представление о неизменности самого объекта в процессе преобразования координат очень важно. Физически это означает, что сам процесс наблюдения объективен и не меняет поведения объекта. Математически — что два набора чисел соответствуют одному геометрическому объекту, следовательно, их можно получить друг из друга преобразованиями координат.

Если при преобразованиях координат проекции инвариантного геометрического объекта меняются по линейному закону, то это тензор. Линейность — очень важное свойство тензоров. Оно означает, что если известны проекции тензора в одной системе координат, то можно получить его проекции в любой системе координат, если известна формула преобразования от одной системы координат к другой.

На этом свойстве тензоров основано их применение в теории сложных систем. При этом тензоры, сохраняя свои математические свойства, приобретают здесь другое содержание, связанное с переходом от обычного пространства к пространству-структуре.

Сам объект, тензор, не меняется при преобразованиях координат, меняются только его компоненты. В разных системах координат компоненты различны; они представлены различными наборами чисел. Существование тензора позволяет рассматривать эти наборы как различные представления одного и того же объекта. Например, точка пространства характеризуется в разных системах координат разными числами — проекциями на оси, но сама она существует независимо от систем координат.

Это дает возможность отличать объекты, связанные с координатами и преобразуемые вместе с ними, от объектов, существующих независимо от систем координат. Таким образом, тензоры позволяют более удобно описывать явления. Это и обуславливает распространение тензорных методов в физике для описания различных явлений и систем.

«Система координат — это эвристический прием, посредством которого ученый математически описывает познаваемое явление. Если другой ученый вводит иную систему координат при описании того же явления, он получает результат, отличный от результата, первого, поскольку рассматривает иные стороны явления. Тензор же позволяет увязать, соединить две точки зрения разных исследователей на данный предмет, достичь взаимопонимания, согласования результатов. Благодаря этому предмет, явление, рассматривается более всесторонне, нежели каждым ученым в отдельности» [Афанасьев В. Г., 1981, с. 165].

Таким образом, на качественном уровне ясно, что тензоры имеют непосредственное отношение к нашим рассуждениям о статуях и системах. Теперь мы можем сказать, что статуя — тензор, а ее фотографии — проекции, причем в буквальном смысле этого слова, в различных системах координат, определенных положениями фотоаппарата. Можно также считать обобщенную сложную систему тензором, а конкретные системы — ее проекциями в различных системах координат.

Тогда, если удалось представить преобразования описаний систем друг в друга как преобразования координат в некотором абстрактном «пространстве систем», то, применяя свойство линейности тензорных преобразований, можно использовать результаты исследования, расчета одной системы и получать результаты для других систем.

Исторически изучение функций, имеющих определенный закон преобразования, было обобщением понятий, которые возникли при развитии различных систем векторного и геометрического анализа. Как уже было сказано, термин «тензор» введен А. Эйнштейном.

Математики развивали тензорное исчисление, чтобы получить возможность выполнять бескоординатные преобразования непосредственно с рассматриваемыми геометрическими объектами независимо от систем координат, в которых они представлены. Это до некоторой степени компенсирует потерю наглядности, которая произошла при переходе к аналитической геометрии.

По-видимому, поэтому сначала этот математический аппарат назывался «абсолютным исчислением». Позднее он получил название «исчисление Риччи» по имени математика, который первый начал собирать воедино различные закономерности преобразований объектов относительно изменений координат.

Риччи, в частности, ввел употребление верхних и нижних индексов, чтобы различать два закона преобразования объектов при изменении координат. Эти законы преобразования, называемые *ковариантностью* и *контравариантностью*, играют важную роль в развитии тензорных понятий.

Еще раз подчеркнем один момент. С одной стороны, мы говорим, что тензор — абстракция, реальны только его проекции; с другой стороны, тензор представляет собой реально существующий инвариант, а его проекции в системы координат субъективны, поскольку вводятся наблюдателем.

Тогда что же такое тензор — абстракция или реальность? Несколько неожиданный ответ таков: и то, и другое, в зависимости от того, что рассматривается. Если мы рассматриваем, скажем, карандаш, то его проекции в системе координат, расположенной в одном конце стола, будут иные, нежели в системе координат, расположенной в другом конце стола. Преобразование проекций друг в друга происходит по линейным законам, следовательно, можно рассматривать их как компоненты тензора. В данном случае тензор — это карандаш, он существует реально, а координаты, проекции введены нами субъективно.

Или рассмотрим вектор скорости потоков автомашин на пересекающихся автомагистралях. Скорости каждого потока (компоненты такого вектора) можно измерить, они реально существуют, а сам вектор здесь абстрактный. Если определить, скажем, его направление, то оно может не совпадать ни с одним из направлений реальных потоков, следовательно, ничему не соответствует¹.

Таким образом, в первом случае тензор — реальность, а во втором (тензор представлен вектором скоростей) — абстракция. В рассмотренных ранее примерах реальная статуя — тензор, проекции которого суть фотографии. А по отношению к представляемому ею образу статуя — только одна из проекций образа в голове конкретного скульптора, в сам образ (реально не существующая абстракция) — тензор. Для систем потоков величин пространством будем считать структуру путем распространения этих потоков. В случае потоков машин пространство определяется совокупностью путей автомагистралей. В случае электрических цепей оно состоит из ветвей, в случае экономической системы — из потоков продуктов и т. д. Это пространство из соединенных элементов системы можно назвать *пространство-структура* и в дальнейшем оно будет представлять для нас главный интерес. Но прежде чем определить в таком пространстве системы координат, их преобразования, рассмотрим сначала преобразования координат в обычном пространстве, два закона преобразования в нем компонент геометрических объектов, а затем будем действовать по аналогии.

1.3. КОВАРИАНТНОСТЬ И КОНТРАВАРИАНТНОСТЬ

При изменении системы координат компоненты представленных в них геометрических объектов могут изменяться по-разному. Имеется два обратных друг другу закона преобразования. Если ком-

¹Здесь, как и всюду, проявляются диалектические закономерности природы: в каждом конкретном есть абстрактное, абстрактное в свою очередь — это проявление конкретного.

поненты объекта меняются по закону, обратному закону преобразования векторов самой координатной системы, т. е. противоположным образом, то такие компоненты называются контравариантными. Если же компоненты объекта меняются по такому же закону, как векторы самой координатной системы, то такие компоненты называются ковариантными¹.

Иногда ковариантность и контравариантность определяют как свойство, присущее самому объекту, а не его компонентам. В соответствии с этим делят геометрические объекты, а также соответствующие им ре-

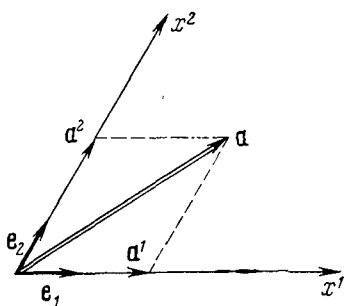


Рис. 1.4. Разложение вектора a по векторам компонент базиса в системе координат (x^1, x^2) двумерного аффинного пространства

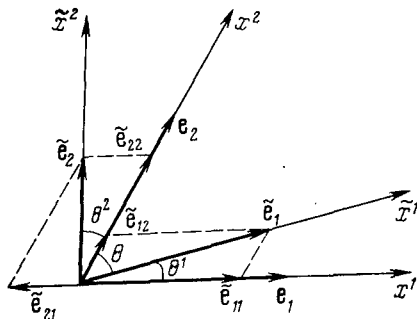


Рис. 1.5. Преобразование векторов базиса при переходе от системы координат (x^1, x^2) к системе координат $(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2)$

альные величины, на ковариантные и контравариантные. Смысл при этом не меняется — эти понятия связаны с преобразованием координат.

Рассмотрим пример преобразования проекций вектора при изменении системы координат в двумерном пространстве. Пусть в этом пространстве задана двумя прямыми линиями — осями x^1 и x^2 (рис. 1.4) косоугольная система координат (x^1, x^2) , а также вектор a . Зададим базис двумя векторами единичной длины, направленными вдоль осей x^1 и x^2 , и разложим вектор a по векторам этого базиса.

Это значит, что мы представим a в виде суммы двух векторов a^1 и a^2 , направленных вдоль осей. Каждый из них, в свою очередь, есть произведение соответствующего базисного вектора, скажем e_1 , на чис-

¹В буквальном переводе терминов: ко — означает совместно, контра — противоположно, вариант — изменение. Следовательно, противоположно изменяющиеся и совместно изменяющиеся компоненты соответственно.

ло, показывающее, сколько раз он укладывается в длине этого вектора (соответственно — a^1). Запишем это так

$$\mathbf{a} = a^1 \mathbf{e}_1 + a^2 \mathbf{e}_2 = \frac{|\mathbf{a}^1|}{|\mathbf{e}_1|} \mathbf{e}_1 + \frac{|\mathbf{a}^2|}{|\mathbf{e}_2|} \mathbf{e}_2 = a^1 \mathbf{e}_1 + a^2 \mathbf{e}_2, \quad (1.1)$$

где $|\mathbf{a}|$ означает длину вектора \mathbf{a} , а знак сложения — сумму векторов. Тогда числа a^1 и a^2 будут представлять собой проекции вектора \mathbf{a} в данной системе координат.

Теперь введем новую систему координат $(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2)$, заданную поворотом оси x^1 на угол θ^1 , а оси x^2 на угол θ^2 (угол между осями x^1 и x^2 равен θ). Сначала мы должны найти закон преобразования векторов базиса \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 в вектора базиса $\tilde{\mathbf{e}}_1$ и $\tilde{\mathbf{e}}_2$ (см. рис. 1.5). Для этого разложим каждый вектор нового базиса по векторам старого базиса так, как это сделано на рис. 1.4 для одного вектора. Получим

$$\tilde{\mathbf{e}}_1 = \frac{\tilde{e}_{11}}{|\mathbf{e}_1|} \mathbf{e}_1 + \frac{\tilde{e}_{12}}{|\mathbf{e}_2|} \mathbf{e}_2, \quad (1.2)$$

$$\tilde{\mathbf{e}}_2 = \frac{\tilde{e}_{21}}{|\mathbf{e}_1|} \mathbf{e}_1 + \frac{\tilde{e}_{22}}{|\mathbf{e}_2|} \mathbf{e}_2, \quad (1.3)$$

где $e_{\alpha\beta}$ представляет величину проекции вектора нового базиса $\tilde{\mathbf{e}}_\alpha$ на ось вектора старого базиса \mathbf{e}_β в его единицах. Здесь α и β принимают значения 1, 2.

Значения этих проекций получим из геометрических соотношений на рис. 1.5. Тогда формулы (1.2), (1.3) принимают вид (читателю предлагаем вывести их самостоятельно)

$$\tilde{\mathbf{e}}_1 = \frac{\sin(\theta - \theta^1)}{\sin \theta} \mathbf{e}_1 + \frac{\sin \theta^1}{\sin \theta} \mathbf{e}_2, \quad (1.4)$$

$$\tilde{\mathbf{e}}_2 = -\frac{\sin \theta^2}{\sin \theta} \mathbf{e}_1 + \frac{\sin(\theta + \theta^2)}{\sin \theta} \mathbf{e}_2. \quad (1.5)$$

Из коэффициентов при векторах старого базиса составим таблицу называемую матрицей преобразования. Эта матрица одинакова для всех преобразований координат такого типа. Обозначим ее как $B_{\tilde{\alpha}}^{\alpha}$, а коэффициенты, для кратности, как $b_{\alpha\tilde{\alpha}}$

$$B_{\tilde{\alpha}}^{\alpha} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} \tilde{1} \\ \tilde{2} \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline \frac{\sin(\theta - \theta^1)}{\sin \theta} & \frac{\sin \theta^1}{\sin \theta} \\ \hline -\frac{\sin \theta^2}{\sin \theta} & \frac{\sin(\theta + \theta^2)}{\sin \theta} \\ \hline \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ \begin{array}{c} \tilde{1} \\ \tilde{2} \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ \hline \end{array} \end{array} \quad (1.6)$$

Матрицы преобразования, пример которой мы получили, играют одну из главных ролей в тензорном анализе. Далее мы постоянно будем с ними встречаться.

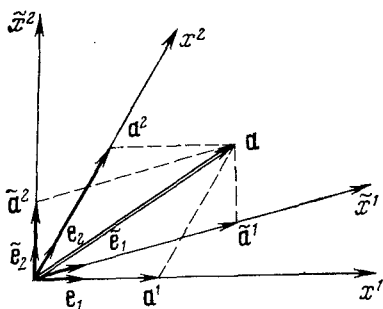
Обозначим совокупность векторов старого базиса как \mathbf{e}_α , а нового базиса — как $\mathbf{e}_{\tilde{\alpha}}$, где $\alpha, \tilde{\alpha}$ перечисляют все оси координат.

Цифры сверху и сбоку матриц соответствуют осям координат; в матрице справа даны более короткие обозначения соответствующих элементов. Таким образом, получаем формулу преобразования координат, которую запишем так

$$\mathbf{e}_\alpha = B_{\tilde{\alpha}}^{\alpha} \mathbf{e}_{\tilde{\alpha}}. \quad (1.7)$$

Получим теперь формулу преобразования компонент вектора \mathbf{a}

Рис. 1.6. Преобразование компонент вектора \mathbf{a} при переходе от системы координат (x^1, x^2) к системе координат $(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2)$ — контравариантные компоненты вектора



(рис. 1.4). На рис. 1.6 показан этот вектор и его проекции в двух системах координат, преобразование которых мы только что рассмотрели. В новой системе координат, как видно из рисунка, вектор \mathbf{a} можно представить в виде суммы двух векторов его проекций — на ось \tilde{x}^1 вектор $\tilde{\mathbf{a}}^1$, а на ось \tilde{x}^2 — вектор $\tilde{\mathbf{a}}^2$:

$$\mathbf{a} = \tilde{\mathbf{a}}^1 + \tilde{\mathbf{a}}^2 \quad (1.8)$$

или через векторы нового базиса (см. (1.1))

$$\mathbf{a} = \tilde{\mathbf{a}}^1 \tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{a}}^2 \tilde{\mathbf{e}}_2. \quad (1.9)$$

Теперь подставим вместо векторов нового базиса их выражения через вектора старого базиса, которые мы уже получили, записали выражениями (1.4), (1.5), а в матричном виде — (1.6), откуда и будем использовать более короткие обозначения коэффициентов

$$\mathbf{a} = \tilde{\mathbf{a}}^1 (b_{11} \mathbf{e}_1 + b_{12} \mathbf{e}_2) + \tilde{\mathbf{a}}^2 (b_{21} \mathbf{e}_1 + b_{22} \mathbf{e}_2);$$

сгруппируем коэффициенты при векторах базиса

$$\mathbf{a} = (\tilde{\mathbf{a}}^1 b_{11} + \tilde{\mathbf{a}}^2 b_{21}) \mathbf{e}_1 + (\tilde{\mathbf{a}}^1 b_{12} + \tilde{\mathbf{a}}^2 b_{22}) \mathbf{e}_2. \quad (1.10)$$

Сравнивая теперь (1.10) и (1.1), приравняем коэффициенты при одних и тех же векторах базиса. Тогда получим

$$\mathbf{a}^1 = \tilde{\mathbf{a}}^1 b_{11} + \tilde{\mathbf{a}}^2 b_{21}, \quad (1.11)$$

$$\mathbf{a}^2 = \tilde{\mathbf{a}}^1 b_{12} + \tilde{\mathbf{a}}^2 b_{22}.$$

Обозначая индексы буквами греческого алфавита, принимающими по очереди все значения, получим

$$a^\alpha = \tilde{a}^\alpha B_\alpha^\alpha := (B_\alpha^\alpha)_i \tilde{a}^\alpha, \quad (1.12)$$

где индекс i означает транспонирование — перестановку строк и столбцов матрицы местами. Мы получили выражение компонент вектора в старой системе через новую, а нужно наоборот. Решая (1.12), получим

$$\tilde{a}^\alpha := (B_\alpha^\alpha)^{-1}_i a^\alpha, \quad (1.13)$$

где степень (-1) означает обратную матрицу к данной, т. е. их произведение дает единичную матрицу, на главной диагонали которой стоят единицы, а остальные элементы — нули.

Как видим, компоненты вектора преобразуются при изменении системы координат по другому закону, нежели векторы самого базиса в соотношении (1.7). Матрица преобразования при этом обратная и транспонированная. Обозначим ее $\tilde{C}_\alpha^\alpha = (B_\alpha^\alpha)^{-1}_i$. Матрицы, для которых выполняется это соотношение, называются *ортогональными*. Что означает это слово, мы вскоре узнаем, а пока заметим, что закон преобразования компонент вектора (1.10) обратный по отношению к такому закону для компонент базиса (1.7). Следовательно, эти величины изменяются противоположным образом по отношению к преобразованию координат.

В соответствии со сказанным в начале раздела, мы должны назвать компоненты вектора *а* контравариантными по отношению к векторам базиса.

Теперь разъясним смысл применения верхних и нижних индексов, которыми, как мог заметить читатель, мы уже начали пользоваться выше. В тензорном анализе контравариантные величины обозначают верхними индексами, например a^α , а ковариантные — нижними индексами, например a_β . Векторы базиса преобразуются ковариантно по отношению к самим себе и обозначаются нижними индексами. Компоненты произвольного вектора контравариантны по отношению к векторам базиса, поэтому обозначены верхним индексом.

Однако для произвольного вектора можно построить и ковариантные компоненты в этой же системе координат. Это возможно потому, что базис, по которому мы раскладывали вектор *а*, не является единственным. Построим другой набор векторов, связанных с данной системой координат, которые образуют базис. Для этого проведем линии перпендикулярно каждой оси координат, вдоль каждой из них выберем единичный вектор и будем использовать построенный так набор векторов, которые обозначим e^α , в качестве базиса. Векторы

этого базиса линейно не зависят от старого, поскольку скалярное произведение соответствующих векторов равно нулю

$$(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}^1) = |\mathbf{e}_1| |\mathbf{e}^1| \cos \frac{\pi}{2} = 0. \quad (1.14)$$

Такие векторы называют *ортогональными*, в нашем случае ортогональность векторов сводится к их перпендикулярности.

Совокупность этих векторов образует базис, который называется *взаимным по отношению к прямому*; для нашего примера оба базиса показаны на рис. 1.7. Переход к взаимному базису можно рассматривать как преобразование системы координат, при котором оси поворачиваются на одинаковый прямой угол, равный 90° .

В трехмерном пространстве при наличии прямолинейных или криволинейных координат x^1, x^2, x^3 в качестве локального базиса можно выбрать либо тройку векторов прямого базиса

$$\mathbf{e}_1(x^1, x^2, x^3),$$

$$\mathbf{e}_2(x^1, x^2, x^3),$$

$$\mathbf{e}_3(x^1, x^2, x^3),$$

направленных по касательным к координатным линиям, либо тройку векторов взаимного базиса

$$\mathbf{e}^1(x^1, x^2, x^3) \equiv \frac{\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3}{[\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3]},$$

$$\mathbf{e}^2(x^1, x^2, x^3) \equiv \frac{\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1}{[\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3]},$$

$$\mathbf{e}^3(x^1, x^2, x^3) \equiv \frac{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2}{[\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3]},$$

направленных перпендикулярно к координатным плоскостям. Для прямоугольной декартовой системы координат $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}^1, \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}^2, \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}^3$, т. е. ковариантные и контравариантные компоненты вектора совпадают. Здесь $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$ есть векторное произведение \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 . $[\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3] = \mathbf{e}^1 [\mathbf{e}^2 \times \mathbf{e}^3]$ смешанное произведение $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2$ и \mathbf{e}^3 . Более подробно эти вопросы рассматриваются в учебниках по векторному анализу (см. также [Корн, 1978]).

Вернемся к двумерному пространству. Векторы построенного взаимного базиса, как можно видеть на рис. 1.7, направлены иначе, чем векторы прямого, ориентированные вдоль осей. Поэтому взаимный базис выглядит непривычно по сравнению с прямым. Однако нет оснований считать его базисом «второго сорта»; все базисы равноправны. Это ставит нас в сложное положение. С одной стороны, чтобы разложить вектор \mathbf{a} по векторам взаимного базиса, необходимо спроектировать его на линии, вдоль которых эти векторы направлены, как это мы делали в прямом базисе. Эти проекции на рис. 1.8 обозначены как \bar{a}^1 и

\bar{a}^2 . С другой стороны, эти линии, которые обозначим как \bar{x}^1 и \bar{x}^2 , определяют уже другую систему координат; можно даже предположить, что она расположена в другом пространстве, «сцепленном» некоторым образом с данным.

Чтобы найти выход, попробуем рассмотреть все возможные проекции, которые возникают в этом случае, и отношения между ними. Разложим вектор a в системе координат (\bar{x}^1, \bar{x}^2) , соответствующей взаимному базису, и рассмотрим те отрезки, которые отсекаются при таком

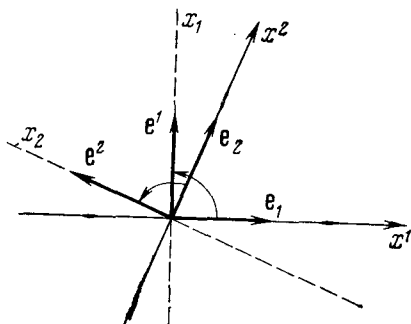


Рис. 1.7. Построение взаимного базиса и системы координат, взаимной к данной, достигается здесь поворотом осей на 90° против часовой стрелки

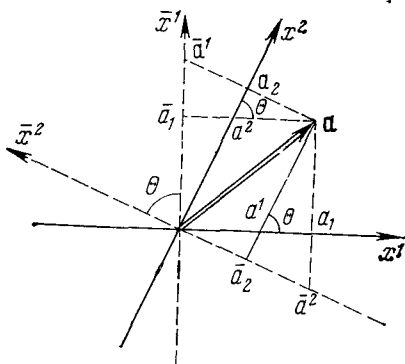


Рис. 1.8. Ковариантные и контравариантные проекции — компоненты вектора a в прямом и взаимном базисах системы координат (x^1, x^2)

проектировании на осях исходной системы координат. Эти отрезки непосредственно связаны с векторами взаимного базиса, но расположены на осях исходной системы. В данном случае их можно получить путем опускания перпендикуляров на оси координат из конца вектора a и в соответствии с этим называть «ортогональными» проекциями: они дают другое представление вектора a в данной системе координат. Значения таких компонент можно выразить через контравариантные компоненты.

Рассмотрим на рис. 1.8 данную систему координат, а также систему координат, линии которой заданы векторами взаимного базиса. Эти системы координат представляют интерес, потому что базисы в них взаимны.

Чтобы выразить векторы базиса (взаимного к данному прямому) и компоненты нашего произвольного вектора в этой системе координат через аналогичные понятия в исходной системе координат, выразим переход к этой системе как преобразование координат вида (1.4),

(1.5), при котором $\theta^1 = \theta^2 = 90^\circ$. Подставляя эти значения в формулы (1.4) и (1.5), получим для векторов взаимного базиса

$$\mathbf{e}^1 = -\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{\sin \theta} \mathbf{e}_2, \quad (1.15)$$

$$\mathbf{e}^2 = -\frac{1}{\sin \theta} \mathbf{e}_1 + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \mathbf{e}_2. \quad (1.16)$$

Обозначим коэффициенты при \mathbf{e}_α как $d^{\alpha\alpha}$, они составят матрицу $D^{\alpha\alpha}$

$$\bar{\mathbf{e}}^\alpha = D^{\alpha\alpha} \mathbf{e}_\alpha. \quad (1.17)$$

Компоненты вектора \mathbf{a} при этом преобразуются, как мы уже установили, с помощью матрицы, обратной и транспонированной по отношению к матрице $D^{\alpha\alpha}$; обозначим ее как $F_{\alpha\bar{\alpha}}$

$$F_{\alpha\bar{\alpha}} = (D^{\alpha\bar{\alpha}})^{-1}. \quad (1.18)$$

Обозначим компоненты вектора в новой системе как \bar{a}^α , тогда формула их преобразования будет иметь вид

$$\begin{bmatrix} \bar{a}^1 \\ \bar{a}^2 \end{bmatrix} = \bar{a}^\alpha = F_{\alpha\bar{\alpha}} a^\alpha = \begin{bmatrix} \operatorname{ctg} \theta & \frac{1}{\sin \theta} \\ -\frac{1}{\sin \theta} & -\operatorname{ctg} \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \end{bmatrix}. \quad (1.19)$$

Теперь мы можем выразить «ортогональные» проекции вектора через контравариантные проекции \bar{a}^α , затем определить их закон преобразования при изменении системы координат. Оказывается, что «ортогональные» проекции вектора преобразуются так же, как вектора базиса, и могут рассматриваться как ковариантные проекции вектора \mathbf{a} .

В самом деле, рассматривая рис. 1.8, можно видеть, что, например, длина a_1 численно равна скалярному произведению компоненты \bar{a}^2 и вектора базиса \mathbf{e}_1

$$a_1 = \bar{a}^2 \mathbf{e}_1 = |\bar{a}^2| |\mathbf{e}_1| \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right). \quad (1.20)$$

Подставляя значения проекции \bar{a}^2 и выражая ее через компоненты \bar{a}^α из (1.19), получим

$$a_1 = -\bar{a}^2 \sin \theta = -\left(-\frac{1}{\sin \theta} a^1 - \operatorname{ctg} \theta a^2 \right) \sin \theta = a^1 + \cos \theta a^2. \quad (1.21)$$

Для a_2 получим аналогично

$$a_2 = \cos \theta a^1 + a^2. \quad (1.22)$$

Мы выразили ортогональные проекции вектора через его контравариантные компоненты. Прежде чем определить формулу преобразования этих компонент при изменении системы координат, составим матрицу из коэффициентов полученного преобразования (1.21) и (1.22), которую обозначим $g_{\alpha\beta}$:

$$g_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} 1 & \cos \theta \\ \cos \theta & 1 \end{vmatrix}. \quad (1.23)$$

Эта матрица, называемая *фундаментальной*, является одним из представлений так называемого *метрического* тензора, который играет действительно фундаментальную роль в тензорном анализе. В частности, он служит для определения понятия расстояния между двумя точками в пространстве геометрий различных типов.

Иначе $g_{\alpha\beta}$ можно получить, перемножив скалярно два вектора базиса, например:

$$(\mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1) & (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2) \\ (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1) & (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \cos \theta \\ \cos \theta & 1 \end{vmatrix}. \quad (1.24)$$

Чтобы получить формулу преобразования a_α , рассмотрим другую систему координат, как мы это делали раньше (см. рис. 1.6). Обозначим в новой системе все величины штрихами, выразим новые ортогональные проекции через новые контравариантные компоненты

$$a_{1'} = a^{1'} + \cos \tilde{\theta} a^{2'}, \quad (1.25)$$

$$a_{2'} = \cos \tilde{\theta} a^{1'} + a^{2'}. \quad (1.26)$$

Теперь подставим вместо $a^{\alpha'}$ их выражение через a^α по формуле (1.13). Затем выразим a^α через a_α по формулам (1.21) и (1.22) и, подставляя их в полученное выражение и производя преобразования, приходим к формуле преобразования ортогональных компонент вектора при изменении системы координат. Чтобы не утомлять читателя громоздкими, хотя и не сложными выкладками, приведем ее окончательный вид

$$\begin{vmatrix} a_{1'} \\ a_{2'} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\sin(\theta - \theta^1)}{\sin \theta} & \frac{\sin \theta^1}{\sin \theta} \\ \frac{\sin \theta^2}{\sin \theta} & \frac{\sin(\theta + \theta^2)}{\sin \theta} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \end{vmatrix}, \text{ или } a_{\alpha'} = B_{\alpha'}^{\alpha} a_{\alpha}. \quad (1.27)$$

Как видим, матрица преобразования совпадает с (1.6), следовательно, ортогональные проекции вектора действительно имеют одинаковый с

базисом закон преобразования и мы можем рассматривать и называть их *ковариантными компонентами* произвольного вектора. Аналогичные рассуждения касаются проекций вектора a_1 и a_2 , a^1 и a^2 в системе координат x^1, x^2 , связанной со взаимным базисом.

Как видим, различные виды проекций вектора по-разному меняются при изменении системы координат, но сам вектор остается инвариантен относительно изменения системы координат. Наглядно понятно, в частности, что его длина постоянна, инвариантна. Чтобы показать это аналитически, рассмотрим сначала формулу преобразования $g_{\alpha\beta}$.

Обозначим в новой системе метрический тензор как $g_{\alpha'\beta'}$; его также можно представить как произведение векторов нового базиса [см. соотношение (1.24)]

$$g_{\alpha'\beta'} = (e_{\alpha'} e_{\beta'}). \quad (1.28)$$

Подставляя сюда формулы преобразования базисов, мы получим формулу преобразования $g_{\alpha'\beta'}$

$$g_{\alpha'\beta'} = (B_{\alpha'}^{\alpha} e_{\alpha} B_{\beta'}^{\beta} e_{\beta}) = B_{\alpha'}^{\alpha} B_{\beta'}^{\beta} g_{\alpha\beta}. \quad (1.29)$$

Как видим, в отличие от всех предыдущих объектов $g_{\alpha\beta}$ преобразуется умножением на матрицу $B_{\alpha'}^{\alpha}$ дважды, что позволяет нам считать его дважды ковариантным объектом. Несложно показать, что матрица преобразования, об-

ратного (1.23), представляет собой дважды контравариантный объект, который обозначим $g^{\alpha\beta}$, его формула преобразования имеет вид

$$g^{\alpha'\beta'} = C_{\alpha'}^{\alpha} C_{\beta'}^{\beta} g^{\alpha\beta}. \quad (1.30)$$

Длину вектора a (рис.1.9) можно выразить как произведение ковариантной и контравариантной компонент

$$s^2 = a^{\alpha} a_{\alpha} = a^1 a_1 + a^2 a_2 \quad (1.31)$$

$$\text{или, используя } g_{\alpha\beta}, \text{ только через контравариантные компоненты } a^{\alpha} \\ s^2 = g_{\alpha\beta} a^{\alpha} a^{\beta}. \quad (1.32)$$

Переходя к новой системе координат и используя формулы преобразования всех величин, получим

$$(s')^2 = g_{\alpha'\beta'} a^{\alpha'} a^{\beta'} = B_{\alpha'}^{\alpha} B_{\beta'}^{\beta} C_{\alpha'}^{\alpha} C_{\beta'}^{\beta} a^{\alpha} a^{\beta} = g_{\alpha\beta} a^{\alpha} a^{\beta}, \quad (1.33)$$

учитывая соотношение $B_{\alpha'}^{\alpha} (C_{\alpha'}^{\alpha})_i = I$ и то, что при преобразовании системы координат длина вектора действительно не меняется.

Подведем итоги нашего краткого экскурса в геометрию преобразований систем координат. Рассмотрев прямой и взаимный базисы, мы

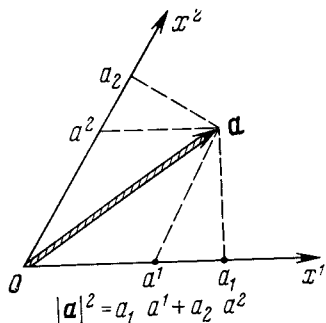


Рис. 1.9. Выражение квадрата длины вектора a через ковариантные и контравариантные компоненты

видим, что каждый вектор в таком пространстве характеризуется проекциями четырех типов:

1. Компоненты разложения a в прямом базисе a^α — контравариантные компоненты.
2. Компоненты разложения вектора в системе координат, связанной со взаимным базисом (назовем ее *двойственной* системой координат) a^α , — контравариантные двойственные компоненты.
3. Ортогональные проекции в прямом базисе a_α — ковариантные компоненты вектора.
4. Ортогональные проекции во взаимном базисе a_α — ковариантные двойственные компоненты.

Все четыре типа компонент представлены на рис. 1.8. Таким образом, в двумерном пространстве для каждого вектора задание системы координат определяет сразу восемь чисел, характеризующих рассмотренные проекции. В декартовой системе координат, где оси расположены под прямыми углами, остаются только два числа — обычные проекции вектора; ковариантные и контравариантные, прямые и взаимные компоненты, базисы сливаются в этом случае в одно целое.

Приведенные построения дают иллюстрацию существа и особенностей тензорных преобразований. Все рассмотренные объекты — вектор, его проекции всех видов, метрический тензор — являются примерами тензоров. Их важность заключается в том, что они представляют собой «строительные блоки», из которых можно построить тензорные объекты любой сложности. Ознакомившись с законами преобразования этих объектов, мы подготовились к тому, чтобы перейти к общему определению тензора в математике, которое в дальнейшем будет конкретизировано в применении к различным ситуациям.

Рассмотрим общий случай. Пусть имеется n -мерное пространство. Связывая с каждой точкой этого пространства n чисел, мы задаем систему координат. Тензором T , r раз контравариантным, s раз ковариантным, называется:

1. Объект, который в каждой точке пространства определяется $(r + s)$ параметрами-функциями, каждая из которых имеет n проекций на оси координат: $T_{m_1, m_2, \dots, m_s}^{k_1, k_2, \dots, k_r}(x^1, x^2, \dots, x^n)$. При этом r параметров контравариантны и при изменении системы координат преобразуются по закону типа (1.7), а остальные s параметров ковариантны и преобразуются по закону типа (1.13). Таким образом, в каждой системе координат этот объект характеризуется n^{r+s} компонентами. Например, вектор в трехмерном пространстве имеет $3^1 = 3$ компоненты, метрический тензор — $3^2 = 9$ компонент и т. д.

2. При переходе от системы координат x^α к системе координат $x^{\alpha'}$ компоненты этого объекта в каждой точке пространства связаны преобразованием

$$T_{m'_1, m'_2, \dots, m'_s}^{k'_1, k'_2, \dots, k'_r} = C_{k_1}^{k'_1} \dots C_{k_r}^{k'_r} B_{m_1}^{m'_1} \dots B_{m_s}^{m'_s} T_{m_1, m_2, \dots, m_s}^{k_1, k_2, \dots, k_r}. \quad (1.34)$$

Общее число индексов $r + s$ называется *рангом* или *валентностью* тензора T .

Матрицы преобразования C и B связаны, как отмечалось, соотношением

$$C_t = B^{-1} \text{ или } C_t B = I, \quad (1.35)$$

где I — единичная матрица. Их в математике называют *ортогональными*. Для преобразования координат

$$x^{\alpha'} = x^{\alpha'}(x^1, x^2, \dots, x^n), \quad \alpha = 1, 2, \dots, n,$$

эти матрицы имеют следующий общий вид

$$C_{\alpha}^{\alpha'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}; \quad B_{\alpha'}^{\alpha} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}}. \quad (1.36)$$

Таким образом, рассматривая ковариантный и контравариантный законы преобразования проекций вектора при изменении системы координат, мы постепенно пришли к построению тензорных преобразований и общему определению тензора. Наш интерес к ковариантности и контравариантности этим не исчерпывается. Мы вернемся к ним при анализе аналогий между понятиями и величинами в различных сложных системах.

В дальнейшем нас будут интересовать системы координат и их преобразования в дискретном пространстве, составленном из элементов структуры системы, например из соединенных ветвей сети. Роль осей координат в таком пространстве играют пути — последовательности ветвей. Пространство-структура ветвей электрической сети будет рассмотрено в следующей главе. Определенные выше геометрические объекты и их формулы преобразования будут использоваться для построения тензорных формул преобразования величин цепи при изменении структуры ее ветвей — таких измеряемых величин, как токи, напряжения, сопротивления и проводимости, рассеиваемая мощность.

Тензорные отношения в электрических цепях, в свою очередь, используются в качестве эталона для поиска и построения тензорных отношений в различных сложных системах как электротехнической, так и неэлектрической природы — технических, физических, экономических и т. д. Уравнения поведения таких систем приводятся к тензорному виду, моделируются в виде эквивалентной электрической цепи и дальнейшие расчеты проводятся методами тензорного анализа сетей.

Обзор построенных и перспективы создания новых моделей, в основе которых лежат топологические и тензорные соотношения, связанные с электрической цепью, будет дан в гл. 3, где рассмотрен пример применения тензорной методологии в экономике для расчета задач балансового типа.

Прежде чем перейти к изложению тензорной теории электрической цепи, используемой для моделирования других систем, обратимся к истории возникновения тензорных понятий в технических расчетах.

Первым начал разрабатывать и применять эти понятия в 30-е годы известный американский ученый и инженер Г. Крон в связи с использованием измеряемых физических величин, потоков энергии для построения единой теории вращающихся электрических машин.

1.4. ЕДИНАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАШИН: «...НИ ОДНА ДЕЙСТВИТЕЛЬНО СУЩЕСТВУЮЩАЯ ФИЗИЧЕСКАЯ ВЕЛИЧИНА НЕ ПРОПУЩЕНА»

Если обратиться к истории, то окажется, что первое применение тензоров в теории систем связано с электромеханическими преобразователями энергии — вращающимися электрическими машинами.

Аналогии с тензорными преобразованиями были связаны с анализом электрических машин с единой точки зрения — как преобразователей потоков энергии.

Первая статья Крона по единой теории электрических машин появилась в 1930 г. В плане тензорной методологии ее следует рассматривать как предварительный этап, поскольку о тензорах в ней речи нет, но зато введены многие важные для дальнейшего понятия.

Каждая электрическая машина в то время считалась индивидуальной, единой теории не было. Для расчета и проектирования каждого типа машины разрабатывалась своя теория (или даже несколько различных теорий).

Наиболее важным было то, что Крон стал использовать для построения теории только измеряемые физические величины — в противоположность вводимым при расчетах различным гипотетическим величинам, не имеющим физического содержания. Крон [Kron, 1930] писал:

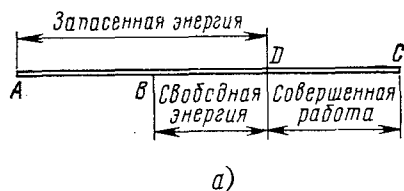
«Электрические машины исследуются здесь с новой точки зрения... Не используются гипотетические токи и потоки, но зато ни одна действительно присутствующая физическая величина не опущена. Вводится и обобщается понятие «свободная энергия», обычно используемое в термодинамике. Критерий хорошей конструкции всех электрических машин выражается константой «термодинамический коэффициент полезного действия», который дает оценку эффективности использования железа и пространства для преобразования энергии.

...Представленный метод позволяет легко определить диаграммы, которые показывают величину и направление потоков энергии между различными частями сложной машины».

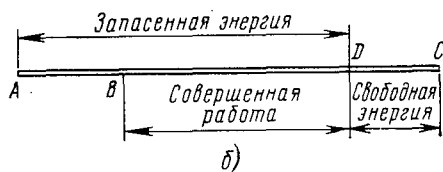
Наиболее важной особенностью измеряемых величин является факт их физического существования — они действительно существуют, независимо от того, измеряем мы их или нет. Показания измерительных приборов могут меняться в зависимости от условий измерения, градуировки самих приборов и т. д., но сама измеряемая величина от этого не зависит. Аналогия с тензорами здесь прямая, если приборы рассматривать как системы координат.

Однако машины, да и другие системы, не всегда описываются в терминах измеряемых величин. Часто для расчетов удобнее использовать некоторые производные величины, вводимые в процессе построения математической модели. Отсутствие физического смысла таких величин ограничивает возможности их использования для анализа процессов, происходящих в системе.

С этой точки зрения представляет интерес анализ соотношений между потоками энергии в различных электромагнитных устройствах,



а)



б)

Рис. 1.10. Энергия в конденсаторе (или в электромагните);

а — постоянный заряд (или поток); б — постоянная э. д. с. (или м. д. с.)

электрической емкостью. Для нас важно, что рассматривается поток энергии, проходящей по путям с различными физическими характеристиками вещества. В дальнейшем совокупности таких путей мы будем рассматривать как системы координат.

Построение энергетической диаграммы Крон [Крон, 1930] производится следующим образом. «Рассмотрим два случая: первый, когда конденсатор не связан с батареей; второй — конденсатор связан с ней.

Когда конденсатор не связан с батареей, заряд, и, следовательно, число линий диэлектрического потока, остается постоянным при любых возможных изменениях. Когда диэлектрик в конденсаторе, поток Q следует по пути с минимальной емкостью C , следовательно, запасенная энергия $Q^2/2C_{\min}$ максимальна. Пусть это значение отложено на рис. 1.10, а как AC . К выдвигаемому диэлектрику приложена сила, пока поток проходит по пути с максимальной емкостью. Пусть отношение $C_{\max}/C_{\min} = k$. В этом состоянии запасенная энергия минимальна и равна $Q^2/2C_{\max}$. Пусть она изображена линией AB , где $AC/AB = k$. Полная работа, совершенная между начальным и этим состоянием, есть BC . Поскольку большей работы от конденсатора получить нельзя, то

выполненный Кроном с помощью энергетических диаграмм. Оказывается, что построенные диаграммы тесно связаны с преобразованиями на проективной плоскости в проективной геометрии, линейный характер преобразований в которой делает ее удобной основой для тензорных построений.

Сначала рассматривается изменение энергии в заряженном конденсаторе, когда он подключен к батарее или отключен от нее. Изменения состоят в том, что в конденсаторе двигается или выдвигается диэлектрик; при этом линии электростатического потока могут проходить по путям с различной электри-

свободная энергия, которой обладал конденсатор в начале цикла, также равна BC . В любом состоянии D энергия, запасенная в конденсаторе, есть AD , совершенная работа — DC , свободная энергия — DB , AB нельзя использовать для совершения работы.

Можно видеть, что в процессе изменения состояния совершенная работа равна уменьшению свободной энергии. Запасенная энергия уменьшается при совершении работы и свободная энергия полностью находится в конденсаторе.

Цикл завершается при внесении диэлектрика обратно в конденсатор. Чтобы сделать это, необходимо совершить работу над диэлектриком, следовательно, свободная энергия и запасенная энергия снова возрастают. Когда диэлектрик вернулся в исходное положение, работа, совершенная над ним, в точности равна работе, совершенной им самим.

Следовательно, в течение цикла точка D описывает прямую линию, начиная от C к B и обратно».

Положение точек B и C будет определяться только зарядом на пластинах конденсатора Q , ограничивая область движения точки D . При этом, независимо от величины Q , также как и C_{max} , (C_{min}) точка B всегда будет разделять точки A и D . Это свойство взаимного расположения точек на прямой инвариантно по отношению к проектированию. Свойство разделения одной пары точек (A, D) другой парой точек (B, C) в проективной геометрии принимается за проективную характеристику расположения четырех точек на прямой [Глаголев, 1963].

Здесь следует осторожно относиться к термину «диэлектрик», поскольку Крон приписывает ему не совсем обычные свойства.

При выдвигании диэлектрика между пластинами конденсатора остается воздух, или вакуум, с диэлектрической постоянной $\epsilon = 1$. Поскольку Крон говорит о переходе от C_{min} к C_{max} , то для рассматриваемого диэлектрика $\epsilon < 1$. Мы не знаем о веществах с $\epsilon < 1$.

По отношению к магнитному полю вещества делятся на парамагнетики (магнитная проницаемость $\mu > 1$) и диамагнетики ($\mu < 1$). (Ферромагнетики не рассматриваем.) Диамагнетизм связан с эффектом прецессии электронных оболочек вокруг направления магнитного поля (ларморова прецессия). Обусловленный им магнитный момент направлен против направления поля. Парамагнетизм связан с ориентацией собственных магнитных моментов атомов или молекул среды в магнитном поле. Это аналогично поляризации диэлектриков под действием электрического поля. Таким образом, диэлектрики ведут себя как электрические аналоги парамагнетиков, а для диамагнетиков электрического аналога нет. Сила, действующая на магнетики в магнитном поле, определяется по формуле

$$\mathbf{f} = \frac{1}{c} [\mathbf{jB}] + \frac{\mu - 1}{8\pi} \nabla B^2, \quad (1.37)$$

а сила, действующая на диэлектрики в электрическом поле — по формуле

$$\mathbf{f} = \frac{\varepsilon - 1}{8\pi} \nabla E^2, \quad (1.38)$$

откуда видно, что диэлектрики втягиваются в электрическое поле, парамагнетики втягиваются в магнитное поле, а диамагнетики выталкиваются им [Тамм, 1966, с. 302].

Таким образом, по своим свойствам выталкиваться электрическим полем конденсатора (см. диаграмму на рис. 1.10) «диэлектрики» Крона представляют собой электрический аналог диамагнетиков. Такие вещества могли бы существовать при наличии ларморовой прецессии электронных оболочек вокруг направления электрического поля, однако такой эффект не наблюдался.

Когда такой диэлектрик находится в конденсаторе, запасенная энергия последнего максимальна. Поскольку заряд остался неизменным, то это означает, что при вдвигании диэлектрика совершаемая работа распределилась в конденсаторе и общая энергия конденсатора возросла. Когда диэлектрик выталкивается, конденсатор теряет энергию.

Когда же конденсатор подключен к батарее, то потенциал (э. д. с.) не меняется, зато меняется заряд. В этом случае энергия конденсатора $1/2 u^2 c_{min}$ где $u = Q/c$ — напряжение на конденсаторе. Когда выдвигается диэлектрик, то батарея поддерживает напряжение постоянным. В отличие от предыдущего случая, когда сохраняется постоянным заряд Q , здесь поддерживается постоянным напряжение u . Энергия, поступающая от батареи на конденсатор, делится на две равные части:

1) пополнение энергии конденсатора, затраченной на выталкивание диэлектрика;

2) увеличение запасенной энергии конденсатора за счет увеличения емкости от c_{min} до c_{max} , т. е. $u^2 c_{max}/2$. Таким образом, запасенная энергия увеличивается на

$$u^2 (c_{max} - c_{min})/2. \quad (1.39)$$

На рис. 1.10, б минимальная энергия конденсатора отложена как AB и эта энергия не может использоваться для совершения работы. При выдвигании диэлектрика точка D состояния конденсатора двигается до точки C . При этом BD равно совершаемой работе, AD запасенной энергии, DC — это та энергия, которая, став потом запасенной энергией, будет равна работе, которую система сможет совершить в будущем, т. е. свободной энергии. В течение цикла точка D двигается по прямой линии от B к C и обратно. При этих преобразованиях также сохраняется инвариантным взаимное расположение точек A, B, C, D . На рис. 1.11 объединены диаграммы на рис. 1.10, а и 1.10, б. Буквы A, B, C, D соответствуют диаграмме рис. 1.10, а, а A', B', C', D' — диаграмме рис. 1.10, б. Кроме того, показана энергия, затрачиваемая батареей на выталкивание диэлектрика, равная $(u^2/2) (c_{max} - c_{min})$

Чтобы показать, как получается это значение, рассмотрим конденсатор с квадратными пластинами со стороной l , ширина между которыми d . Пондеромоторная сила, действующая на диэлектрик в электрическом поле, определяется по формуле [Тамм, 1966, с. 155]: $f = -(1/8\pi)E^2 \text{ grad } \epsilon$, где E — напряженность поля, в данном случае $E = u/d = \text{const}$, ϵ — диэлектрическая постоянная. Работа, совершаемая силой f на пути от 0 до l , определяется объемным интег-

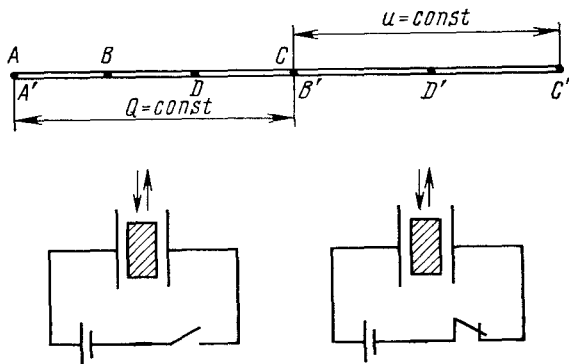


Рис. 1.11. Совместная диаграмма для постоянного потока и постоянной э. д. с.

ралом, который с учетом симметрии принимает вид (ось x направим вдоль движения диэлектрика)

$$\begin{aligned} A &= \int_v \mathbf{x} f dv = -\frac{dl E^2}{8\pi} \int_0^l \frac{\partial \epsilon}{\partial x} dx = \frac{d^2 E^2}{2l} \int_0^l (c_{\max} - c_{\min}) dx = \\ &= \frac{u^2}{2} (c_{\max} - c_{\min}). \end{aligned} \quad (1.40)$$

Таким образом, суммарная энергия, поступающая от батареи на конденсатор за один цикл, равна

$$u^2 (c_{\max} - c_{\min}). \quad (1.41)$$

Левее точки C (B') диаграмма соответствует состоянию конденсатора при отключенной батарее ($Q = \text{const}$), правее — при включенной батарее ($u = \text{const}$). В терминах напряжения батареи u энергия в крайних положениях диэлектрика запишется так

$$AB = \frac{1}{2} u^2 c_{\min} \frac{c_{\min}}{c_{\max}}, \quad (1.42)$$

$$AC (AB') = \frac{1}{2} u^2 c_{\min}, \quad (1.43)$$

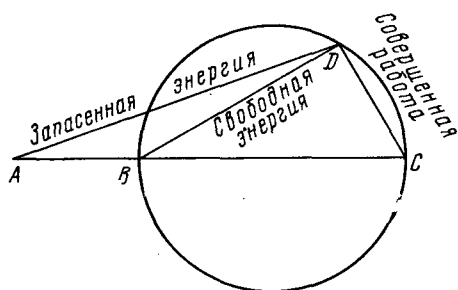
$$AC' = 1/2 u^2 c_{\max}, \quad (1.44)$$

$$AC'' = 1/2 u^2 (2c_{\max} - c_{\min}). \quad (1.45)$$

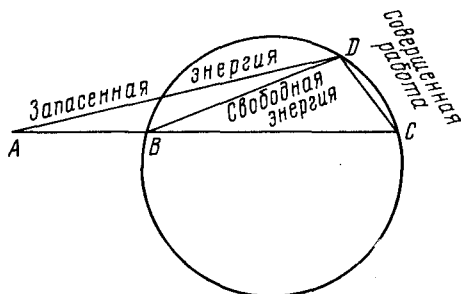
Если бы вытаскивание диэлектрика требовало совершения работы, то, во-первых, приложенная сила передавала бы конденсатору энергию помимо батареи, а во-вторых, уменьшение емкости привело бы и к



а)



б)



в)

уменьшению общей энергии конденсатора, уменьшению заряда, т. е. часть энергии конденсатора ушла бы в батарею.

Далее в статье рассмотрены энергетические диаграммы трансформатора (рис. 1.12). Для описания колебательного характера непрерывного потока энергии Крон вводит два типа мощности (поток энергии в единицу времени) — активную и реактивную, комбинация которых характеризует мощность, поступающего в нагрузку. С этой же точки зрения были рассмотрены многие другие типы электрических машин, построены их энергетические диаграммы. Хотя статья и вызвала дискуссию, в целом попытка обобщить теорию электрических машин была встречена одобрительно. Но критики указывали и недо-

Рис. 1.12. Полная круговая диаграмма распределения энергии в конденсаторе (электромагните)

статки этого, по существу графического, подхода к расчету электрических машин. Главное заключалось в том, что для расчета сложных машин, тем более для нескольких соединенных машин, диаграммы становились настолько громоздкими, запутанными, что практическое применение становилось невозможным. Требовался аналитический метод расчета, основанный на использовании измеряемых величин, понятий потоков энергии через структуру машин.

Такой метод был разработан и представлен Кроном в большой статье, ставшей классической, которая была опубликована в 1934 г. под названием «Нериманова динамика вращающихся электрических машин» [Крон, 1934]. В статье рассматривается единая теория электрических машин, основанная на тензорном представлении измеряемых физических величин. Суть ее заключалась в следующем. Все различные электрические машины рассматриваются как проекции одной обобщенной машины в частных системах координат пространства, структура которого может быть различна и усложняется в зависимости от режима работы машины: для вращения с постоянной скоростью — обычное, евклидово; для режима ускорения — риманово, обладающее кривизной, а для режима малых колебаний (качаний) — нериманово, обладающее не только кривизной, но и кручением. Уравнения поведения этой абстрактной обобщенной машины записываются в тензорном виде с использованием ковариантной производной, тензора кривизны Римана—Кристоффеля и других абстрактных математических понятий, до этого не применявшихся в электротехнике. Уравнения любой другой машины получаются из уравнений обобщенной машины с помощью преобразования координат, задаваемого схемой соединения обмоток машины.

Основные идеи использования этой теории были изложены Кроном также в статье «Применение тензорного анализа — искусство инженера», опубликованной в 1935 г. в трудах Электротехнического института Монтефиоре [Крон, 1935], за которую ему присудили премию Монтефиоре Льежского университета (Франция).

Большую поддержку в присуждении Крону этой премии сыграл выдающийся французский физик и прогрессивный общественный деятель Поль Ланжевен. В одной из своих последних речей П. Ланжевен обосновал причины присуждения этой премии тем, что объединение двух фундаментальных наук — физики и геометрии — нашло у Крона новую область применения — электротехнику:

«Теория относительности ...пользуется не только теорией групп, но и другими частями математики, которые в прежние времена были разработаны без всякого предвидения их возможных применений. Таковы, например, теория тензоров, которая в настоящее время дает физике наиболее гибкое и наиболее точное средство представления величин, таковы неевклидовы и неримановы геометрии...

Весьма примечательно, что эти наиболее обобщенные геометрии — первоначально нашедшие применение в физике и позволившие глубоко объединить две науки: физику и геометрию, которые до того были независимыми — недавно нашли применение также и в электротехнике. За несколько лет до второй мировой войны я участвовал в жюри, изучавшем и оценивавшим работы кандидатов на премию Монтефиоре. Мы единогласно присудили первое место американскому инженеру Габриэлю Крону, который показал, каким образом использование наиболее обобщенных геометрий и матричного исчисления, тесно связан-

ного с тензорным исчислением, позволяет упростить и обобщить разрешение проблем электротехники, связанных с конструкцией и расчетом машин постоянного или переменного тока» [Ланжевэн, 1949, с. 427].

В дальнейшем оказалось, что область применения этого синтеза физики и геометрии гораздо шире. Эту область можно распространить на самые различные системы.

1.5. ТЕНЗОРЫ В ЭЛЕКТРОМЕХАНИКЕ. ОБОБЩЕННАЯ МАШИНА И МАТРИЦА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Крон ввел тензоры в теорию электрических машин на основе использования измеряемых физических величин. Согласно принципам теории относительности, все измеряемые физические величины суть тензоры. Реальная величина не зависит от системы координат, хотя значения ее проекций в различных системах координат могут быть разными. Значения координат при переходе от одной системы координат к другой меняются, сама она остается инвариантной.

Рассматривая электрические машины, Крон применил по аналогии идею тензорного подхода. Эта идея заключается для машин в том, что существует некоторая абстрактная Машина, единая для всех типов электрических машин («тензор») и реализуемая в каждой конкретной машине как проекция в некоторой системе координат. Причем одна машина (система координат) отличается от машины другого типа (другой системы координат) количеством и способом соединения элементов (обмоток ротора и статора), которые есть в любой машине. Отсюда следует, что существует некоторая простейшая «система координат» (которую Крон назвал «обобщенная машина»), для которой можно вывести уравнения поведения аналитически. Тогда уравнения любой другой машины (отличающейся способом соединения элементов) можно получить путем преобразования от простейшей системы координат, умножая каждую величину в уравнениях на матрицу преобразования $C_{\alpha\pi}^{\pi}$, показывающую способ соединения обмоток, в соответствии с ее валентностью.

Оказалось, что уравнения электрических машин и неподвижных электрических сетей имеют одинаковый вид при условии, что обычное дифференцирование в уравнении

$$e_{\alpha} = R_{\alpha\beta} i^{\beta} + \frac{d\varphi_{\alpha}}{dt} \quad (1.46)$$

заменяется ковариантным дифференцированием тензорного исчисления

$$e_{\alpha} = R_{\alpha\beta} i^{\beta} + \frac{\delta\varphi_{\alpha}}{dt} \quad (1.47)$$

В этих уравнениях e — напряжение, R — сопротивление (резистанс), i — ток, φ — магнитный поток, t — время, а $\delta\varphi_{\alpha}/dt$ — ковариантная

производная, учитывающая изменение вектора при параллельном переносе в криволинейном римановом пространстве. Таким образом, даже режим ускорения электрических машин потребовал, чтобы поведение машины описывалось движением представляющей точки в n -мерном римановом, а не евклидовом пространстве. Более того, анализ малых колебаний электрических машин в тензорной форме приводит к уравнению

$$\delta e_{\alpha} = R_{\alpha\beta} \delta i^{\beta} + L_{\alpha\beta} \frac{\delta(\delta i^{\beta})}{dt} + K_{\delta\gamma\beta\alpha} i^{\delta} i^{\beta} dx^{\gamma} + R_{\alpha\beta\gamma} i^{\beta} dx^{\gamma}, \quad (1.48)$$

где $R_{\alpha\beta\gamma}$ — тензор третьего ранга, определяемый [Kron, 1934] сопротивлениями, а $K_{\delta\gamma\beta\alpha}$ — обобщенный тензор кривизны Римана — Кристоффеля. Неравенство нулю $K_{\delta\gamma\beta\alpha}$ показывает, что поведение вращающейся электрической машины в режиме качания можно описать уравнением движения представляющей точки в n -мерном неримановом (аффинном) пространстве с асимметричной связью (с кручением), действующей по направлению позиционной (не сохраняющейся) силы и противоположной силе сцепления, пропорциональной скорости частицы. Таким образом, тензорный анализ и дифференциальная геометрия связываются в единый аппарат технических расчетов.

Нетрудно видеть, что с самого начала тензоры, которые применял Крон, радикально отличались от тензоров, которые использовались физиками и математиками. Прежде рассматривалось пространство непрерывное, изотропное (т. е. свойства пространства не менялись в различных направлениях). В этом пространстве существует бесконечное число систем координат, в том числе и бесконечно близких друг к другу, поэтому всякое преобразование координат локально линейно и напрашивается одна из важных аксиом геометрии — преобразования координат образуют группу¹.

Пространство, в котором рассматриваются электрические машины, отличается тем, что системы координат определяются способом соединения обмоток статора и ротора машины. Уже поэтому нельзя вводить бесконечно близкие системы координат, их оси определяются путями токов в обмотках, т. е. пространство наделено структурой. Вдоль каждого пути потока (обмотки) пространство непрерывно, но вне этих путей потока нет и пространство отсутствует. Таким образом, пространство становится анизотропным пространством-структурой, в котором есть выделенные направления. Чтобы в этом пространстве преобразования координат оставались группой, нужны дополнительные предположе-

¹Теория групп составляет обширную область математики с многочисленными приложениями. В данном случае достаточно знать, что преобразования координат образуют группы, если: 1) два последовательных преобразования координат дают снова преобразование координат, 2) каждое преобразование координат имеет обратное и 3) можно определить «единичный элемент», группы преобразований, не меняющий системы координат (это, очевидно, квадратная единичная матрица $C_{\alpha'}^{\alpha}$).

ния. Позже оказалось, что структура такого пространства намного сложнее. Каждая физически измеримая величина образует свою собственную сеть потоков и эти сети соединены в единую структуру. Элементы сетей уже не только одномерные ветви, но также двумерные плоскости, и более многомерные объекты. Таким образом, все пространство заполнено, но наделено весьма сложной структурой (см. § 3.5). Однако в 1934 г. это еще было неизвестно. В то время электрическая машина каждого типа рассматривалась как некоторое отдельное устройство, для которого разрабатывалась своя теория, причем часто для одной машины имелось несколько теорий. В этом разнообразии теорий применялись самые различные методы: от чисто графических до чисто аналитических, таких, как теории поперечного поля, вращающегося поля или двух реакций, методы эквивалентных цепей, графические методы, использующие векторные диаграммы и т. д.

Фактически каждый мог разрабатывать свою теорию в зависимости от образования, потребностей и вкуса, несмотря на то, что все машины обладают одной структурой, отличаясь только способом соединения электрических цепей, и все машины представляют собой технические реализации одного физического явления взаимного преобразования электрической, магнитной и механической энергий.

Целью своей работы Крон ставил получение уравнений, описывающих поведение электрической машины любого типа, из динамических уравнений Лагранжа с помощью стандартных преобразований. Предположение о том, что уравнения любых машин имеют одинаковую форму, соответствующую одинаковому характеру протекающих в них физических явлений (это в дальнейшем стало называться *постулатом обобщения*), позволило производить тензорные преобразования членов этих уравнений, представленных в виде матриц, при переходе от одной машины к другой.

Все электрические машины состоят из двух частей: неподвижной — статора, на магнитопроводящей конструкции которого расположены произвольные асимметричные обмотки, и вращающейся — ротора, на котором также располагаются обмотки произвольного вида, состоящие из нескольких слоев проводов.

В зависимости от типа машины, и статор и ротор могут играть роль индуктора (магнита или электромагнита, создающего магнитное поле) и якоря (в обмотках которого при вращении машины или при ином изменении магнитного потока возникает индуцированная э. д. с.). Кроме этого имеются контактные кольца и скользящие по ним контактные пластинки (щетки), при помощи которых снимается или подводится ток к ротору; вид и форма последних также зависят от типа машины.

Известно, что движение динамической системы можно представить движением точки в n -мерном римановом пространстве с метрикой $L_{\alpha\beta}$. Еще Максвелл показал, что динамические уравнения Лагранжа применимы к электродинамическим проблемам, если, кроме механических, они содержат электрические степени свободы (скажем, m таких

степеней, описываемых m координатами x^a , измеряющими общее количество заряда, который переносится через данную точку в каждой независимой электрической цепи от начального момента времени t_0 до любого t). При этом m величин x^a , которые в динамике были бы названы *обобщенными скоростями*, являются здесь токами i^a в различных независимых цепях (обмотках машины).

С точки зрения динамики вращающиеся электрические машины можно рассматривать как квазиголономные динамические системы. Это связано с особым характером преобразований электрических и механических координат в предположении, что отсутствует насыщение железа и другие аналогичные явления. В этом случае R и L (как электрические, так и механические) зависят только от механической координаты (угла вращения θ) и не зависят от электрических координат (зарядов), а также обобщенных скоростей (токов i^a и $\theta = d\theta/dt$).

В геометрии постоянное отсутствие специальных координат (в данном случае — зарядов) в компонентах всех геометрических объектов называется *цилиндрическим условием*. Таким образом, для $(m + n)$ -мерного пространства с n механическими и m электрическими координатами имеется цилиндрическое условие, связанное с m электрическими координатами.

Преобразование геометрических объектов для таких динамических систем, как электрические машины, голономно для механической координаты θ , а преобразование дифференциалов электрических координат неголономно, но зависит только от θ . Поэтому в новой системе координат геометрические объекты зависят только от той координаты старой системы (угла поворота θ), которая преобразуется голономно и, таким образом, мы можем рассматривать все геометрические объекты, принадлежащие по существу к неголономной системе отсчета, как голономные. Это дает возможность получить уравнения машин, несмотря на наличие связей, наложенных соединением элементов (обмоток) машины. В динамике такие системы и называются *квазиголономными динамическими системами*.

Уравнение Лагранжа в случае электрических машин справедливо только для координатных осей, движущихся вместе с проводниками, однако в большинстве машин преобразования от обобщенной машины к данной достаточно просты только для неподвижных координатных осей. Дело в том, что в обобщенной машине индуктивности постоянны, и тогда из уравнений движения исчезают члены, содержащие $\sin \theta$ и $\cos \theta$ (угол поворота ротора θ зависит от времени), наличие которых значительно усложняло прежние методы динамического анализа электрических машин.

Чтобы избежать этого, Крон ввел две обобщенные машины (иначе называемые представляющими), в одной из которых каждая роторная обмотка имеет свою движущуюся ось и все эти оси движутся вместе с ротором, а во второй — все оси, как статорные, так и роторные, неподвижны и располагаются произвольно. Для первой машины Крон получает уравнения движения непосредственно из уравнений Лагранжа. Эти уравнения преобразуются в уравнения второй машины и уже из этой второй машины с неподвижными осями можно получить уравнения любой вращающейся машины с помощью тензорных преобразований.

Рассмотрим в общих чертах получение уравнений обобщенной машины из уравнений Лагранжа, а затем переход от этих уравнений к уравнениям конкретной машины с помощью тензора преобразования.

Идеальная вращающаяся машина — это машина, в которой (рис. 1.13):

1) роторные обмотки расположены *симметрично* вокруг гладкого ротора;

2) статор имеет полюсные наконечники и произвольно расположенные асимметричные обмотки.

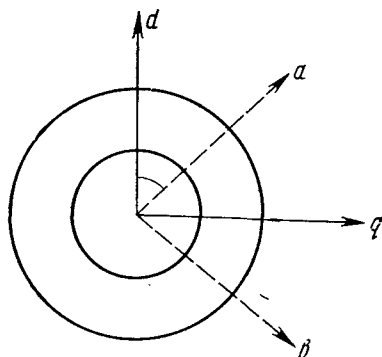


Рис. 1.13. Расположение осей координат и обмоток в обобщенной (простейшей) вращающейся электрической машине

Предполагается, что собственные и взаимные индуктивности ротора при вращении меняются по синусоидальному закону.

Для каждой машины необходимо получить два набора величин, получаемых экспериментальным или расчетным путем:

1) сопротивления всех обмоток и сопротивление трения вала (если оно есть), образующие матрицу $R_{\alpha\beta}$;

2) собственные и взаимные индуктивности всех обмоток по рассматриваемым осям и момент инерции ротора, причем индуктивности всех роторных обмоток выражаются как функции угла поворота θ , играющего роль механической координаты x^t .

Эти величины образуют матрицу $L_{\alpha\beta}$, играющую роль метрического тензора геометрии $g_{\alpha\beta}$.

Крон рассматривает обобщенную машину следующего типа:

1) на статоре имеется один слой обмоток по осям q и d ;

2) на роторе имеется один слой обмоток по взаимно перпендикулярным осям, расположенным под углом θ к осям d и q .

Для такой машины значение L_{mn} равно

$$L_{mn} = \begin{array}{c|ccccc} & n & d_s & a & b & q_s & t \\ \hline m & & & & & & \\ d_s & & L_{sd} & M_d \cos \theta & -M_d \sin \theta & 0 & 0 \\ a & & M_d \cos \theta & L_1 - L_2 \cos 2\theta & L_2 \sin 2\theta & M_q \sin \theta & 0 \\ b & & -M_d \sin \theta & L_2 \sin 2\theta & L_1 + L_2 \cos 2\theta & M_q \cos \theta & 0 \\ q_s & & 0 & M_q \sin \theta & M_q \cos \theta & L_{sq} & 0 \\ t & & 0 & 0 & 0 & 0 & L_{tt} \end{array}, \quad (1.49)$$

где $L_1 = (L_{rq} + L_{rd})/2$, а $L_2 = (L_{rq} - L_{rd})/2$. Величины с индексом s относятся к статору, r — к ротору, d — к осям в продольном направлении, q — к осям в поперечном направлении, L — собственная индуктивность, M — взаимная индуктивность.

Чтобы понять, как были первоначально введены тензоры в теорию электрических машин, рассмотрим в общих чертах получение уравнения движения обобщенной машины из динамического уравнения Лагранжа. Для обобщенной машины с движущимися координатными осями необходимо найти:

1) полное число зарядов, прошедших через каждую обмотку за определенное время, и мгновенное угловое смещение ротора от центра полюсного наконечника, т. е. величины, соответствующие координатам и обозначенные x^k , где k — индекс любой обмотки: x^d , x^q , $x^t \equiv \theta$;

2) значение мгновенного тока в каждой обмотке и мгновенную угловую скорость ротора $i^k = dx^k/dt$;

3) мгновенное напряжение на зажимах, приложенное к любой обмотке, и мгновенный момент вращения вала e_k .

Мгновенная кинетическая энергия $T = 1/2 L_{mn} i^m i^n$ состоит из суммы магнитной и механической кинетической энергии. Мгновенная функция диссипации (половина от рассеиваемой мощности) равна $F = 1/2 R_{mn} i^m i^n$.

Во вращающейся машине имеется одна геометрическая координата θ и n — 1 электрических координат (заряды).

Уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^k} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^k} = Q_k, \quad (1.50)$$

$\mathcal{L} = T - V$ — функция Лагранжа, V — потенциальная энергия, Q_k обобщенные силы.

Поскольку потенциальная энергия вращающейся электрической машины равна нулю, то уравнение Лагранжа для системы, обладающей кинетической энергией и диссипацией, принимает вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^k} \right) - \frac{\partial T}{\partial x^k} + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^k} = e_k. \quad (1.51)$$

Подставляя сюда значения для T и F , получим

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{mn} i^m i^n}{\partial i^k} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial L_{mn} i^m i^n}{\partial x^k} + \frac{\partial R_{mn} i^m i^n}{\partial i^k} \right) = e_k, \quad (1.52)$$

но

$$\frac{1}{2} \frac{\partial (L_{mn} i^m i^n)}{\partial i^k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial L_{mn}}{\partial i^k} i^m i^n + L_{mn} \frac{\partial i^m}{\partial i^k} i^n + L_{mn} i^m \frac{\partial i^n}{\partial i^k} \right). \quad (1.53)$$

Поскольку L_{mn} от токов i^k не зависит, то $\partial L_{mn} / \partial i^k = 0$, а кроме того

$$L_{mn} \frac{\partial i^m}{\partial i^k} i^n = L_{mn} \delta_k^m i^n = L_{kn} i^n. \quad (1.54)$$

Тогда

$$\frac{1}{2} \frac{\partial (L_{mn} i^n i^m)}{\partial i^k} = L_{mk} i^m; \quad (1.55)$$

аналогично

$$\frac{1}{2} \frac{\partial (R_{mn} i^m i^n)}{\partial i^k} = R_{mk} i^m. \quad (1.56)$$

Учитывая, что по правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{d}{dt} (L_{mk} i^m) = L_{mk} \frac{di^m}{dt} + \frac{\partial L_{mk}}{\partial x^n} i^m i^n, \quad (1.57)$$

имеем

$$e_k = R_{mk} i^m + L_{mk} \frac{di^m}{dt} + \left(\frac{\partial L_{mk}}{\partial x^n} - \frac{1}{2} \frac{\partial L_{mn}}{\partial x^k} \right) i^m i^n. \quad (1.58)$$

Разделим первое слагаемое в скобках на две части

$$\frac{\partial L_{mk}}{\partial x^n} i^m i^n = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial L_{mk}}{\partial x^n} + \frac{\partial L_{nk}}{\partial x^m} \right) i^m i^n. \quad (1.59)$$

Тогда

$$e_k = R_{mk} i^m + L_{mk} \frac{di^m}{dt} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial L_{mk}}{\partial x^n} + \frac{\partial L_{nk}}{\partial x^m} - \frac{\partial L_{mn}}{\partial x^k} \right) i^m i^n. \quad (1.60)$$

До этого момента тензоров еще нет. Мы просто получили из уравнения Лагранжа уравнение напряжений одной частной электрической машины. Однако из уравнения (1.60) можно усмотреть аналогию между выражением в скобках и одним из геометрических объектов тензорного анализа — так называемым символом Кристоффеля 1-го рода $\Gamma_{\alpha\beta,\gamma}$. В самом деле, если предположить, что матрица индуктивностей L_{mn} играет такую же роль для электрической машины, какую в геометрии играет метрический (фундаментальный) тензор $g_{\alpha\beta}$, то выражение в скобках в (1.60) соответствует символу Кристоффеля 1-го рода

$$\Gamma_{\alpha\beta,\gamma} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} \right), \quad (1.61)$$

т. е. в нашем случае

$$\Gamma_{mn,k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial L_{mk}}{\partial x^n} + \frac{\partial L_{kn}}{\partial x^m} - \frac{\partial L_{mn}}{\partial x^k} \right), \quad (1.62)$$

и уравнение напряжения принимает вид

$$e_k = R_{mk} i^m + L_{mk} \frac{di^m}{dt} + \Gamma_{mn,k} i^m i^n. \quad (1.63)$$

В уравнении напряжения (1.63) R_{mk} и L_{mk} известны. Необходимо определить $\Gamma_{mn,k}$ — как его численное значение, так и физический смысл. Первое проще всего сделать из уравнения (1.58) по формуле

$$\Gamma_{mn,k} = \frac{\partial L_{mk}}{\partial x^n} - \frac{1}{2} \frac{\partial L_{mn}}{\partial x^k}. \quad (1.64)$$

Индуктивность L_{mk} зависит только от геометрической координаты — угла поворота ротора $\theta = x^t$. Поэтому t должно быть одним из индексов. Тогда

$$\text{если } n=t, \text{ то } \Gamma_{mt,k} = \partial L_{mk} / \partial x^t, \quad (1.65)$$

$$\text{если } k=t, \text{ то } \Gamma_{mn,t} = -0,5 (\partial L_{mn} / \partial x^t),$$

$$\text{если } m=t, \text{ то } \Gamma_{tn,k} = 0.$$

Дифференцирование L_{mk} , заданной уравнением (1.49), по θ приводит к следующим выражениям для $\Gamma_{mn,k}$, например

$$\Gamma_{mt,k} = \begin{array}{c} \begin{array}{c} k \\ d_s \\ a \\ b \\ q_s \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline d_s & 0 & -M_d \sin \theta & -M_d \cos \theta & 0 \\ \hline a & -M_d \sin \theta & 2L_2 \sin 2\theta & 2L_2 \cos 2\theta & M_q \cos \theta \\ \hline b & -M_d \sin \theta & 2L_2 \cos 2\theta & -2L_2 \sin 2\theta & -M_q \sin \theta \\ \hline q_s & 0 & M_q \cos \theta & -M_q \sin \theta & 0 \\ \hline \end{array} \end{array}, \quad (1.66)$$

аналогично вычисляется $\Gamma_{mn,t}$.

Как видим, напрасно некоторые критики писали, будто в работах Крона не вычислено ни одного символа Кристоффеля. Кроме того, А. В. Берендеев (в дискуссии, проведенной по работам Крона на страницах журнала «Электричество» в 1950—1952 гг.) утверждал, будто Крон за электрические координаты принимал токи; тогда элементы символов Кристоффеля равны нулю (индуктивность от величины тока не зависит), на основании чего теории Крона были объявлены «дутыми новинками американской науки» [Берендеев, 1950]. В действительности Крон принимал в качестве координат не токи, а заряды и рассматривал зависимости индуктивности только от угла поворота ротора $x^t = \theta$.

Итак, мы получили уравнение напряжения обобщенной машины с движущимися координатными осями (которые суть истинные координаты Лагранжа) из уравнения Лагранжа. Однако к этому типу машин относится только синхронная машина и индукционный двигатель со скользящими кольцами при условии, что кольца принимаются за координатные оси.

Уравнения большинства электрических машин получают для неподвижных координатных осей. Чтобы использовать для этого тензорные преобразования, необходимо вывести уравнение напряжения для обобщенной машины в неподвижных осях.

Рассмотрим новую обобщенную машину, в которой координатные оси ротора в продольном d_r и поперечном q_s направлениях неподвижны. Таким образом, старые переменные x^a и x^b заменяются на новые x^{dr} и x^{qr} ; а переменные x^{ds} и x^{qs} остаются прежними.

Из выражения для L_{mn} (1.49) видим, что взаимная индуктивность между осями a и d равна $M_d \cos \theta$, при этом M_d — это значение взаимной индуктивности, когда ось направлена по оси d_s ($\theta = 0$, см. рис. 1.13). Следовательно, взаимную индуктивность между старой осью a и новой d_s можно определить как $L_{rd} \cos \theta$, где L_{rd} — собственная индуктивность оси, когда она совпадает с осью d_r .

Из той же формулы можно получить зависимость между взаимными индуктивностями по осям b и d_r в виде $L_{rd} \sin \theta$.

Потокосцепление по оси d_r не зависит от системы координат, в которой его записывают. Поэтому потокосцепления, обусловленные старыми и новыми токами, равны

$$i^d_r L_{rd} = i^a L_{rd} \sin \theta - i^b L_{rd} \sin \theta, \quad (1.67)$$

поскольку i^{qs} не производит потокосцепления по оси d_r . Откуда

$$i^d_r = i^a \cos \theta - i^b \sin \theta. \quad (1.68)$$

Рассматривая потокосцепление по оси q_r , аналогично получим соотношение между старыми и новыми токами

$$i^{q_r} = i^a \sin \theta + i^b \cos \theta. \quad (1.69)$$

Поскольку токи — это производные по времени от координат (зарядов), то из этих соотношений можем найти соотношение между дифференциалами новых dx^π и старых dx^m переменных (зарядов)

$$dx^{d_r} = \cos \theta dx^a - \sin \theta dx^b, \quad (1.70)$$

$$dx^{q_r} = \sin \theta dx^a + \cos \theta dx^b.$$

Коэффициенты дифференциалов можно представить квадратной матрицей, обозначаемой через C_m^π (это матрица преобразования одного из представлений тензора преобразования).

$$C_m^\pi = \begin{matrix} & \begin{matrix} m \pi & d_s & d_r & q_r & q_s & t \end{matrix} \\ \begin{matrix} d_s \\ a \\ b \\ q_s \\ t \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}. \quad (1.71)$$

Поскольку детерминант равен единице, преобразование называется ортогональным. В дальнейшем ортогональные преобразования

будут играть ключевую роль. Отсюда мы можем получить соотношения между переменными и токами двух обобщенных машин

$$dx^\pi = C_m^\pi dx^m; \quad i^\pi = C_m^\pi i^m. \quad (1.72)$$

С помощью тензора преобразования C_m^π все величины уравнения машины с движущимися координатными осями (L_{mn} , $\Gamma_{mn,h}$ и т. д.) преобразуются в величины машины с неподвижными координатными осями ($L_{\pi n}$, $\Gamma_{\pi n,h}$ и т. д.) по формулам, включающим C_m^π или обратную к ней квадратную матрицу $C_\pi^m = (C_m^\pi)^{-1}$

$$C_\pi^m = \begin{matrix} & \pi^m & d_s & a & b & q_s & t \\ \begin{matrix} d_s \\ d_r \\ q_s \\ t \end{matrix} & \begin{matrix} q_r \\ q_s \\ t \end{matrix} & \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \hline 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \end{matrix} \quad (1.73)$$

в предположении, что уравнение напряжения машины с неподвижными осями по формуле точно такое же, как уравнение машин с движущимися осями.

Аналогично все другие машины отличаются от обобщенной машины с неподвижными осями только тензором преобразования C_π^d . Каждая машина имеет свой собственный тензор преобразования, дающий фактически математическое представление ее диаграммы соединения.

Если дана диаграмма соединения обмоток статора и ротора машины, то можно построить матрицу соединения, получить уравнения напряжения и определить любой режим работы машины с помощью расчетов, не проводя физического анализа, поскольку во всех электрических машинах происходит одно и то же физическое явление.

Таким образом, все электрические машины оказываются как бы проекциями в частные системы координат (определяемые схемами их соединения) одной и той же абстрактной Машины — технического устройства, реализующего физическое явление электромеханического преобразования энергии. При этом обобщенная машина соответствует простейшей системе координат.

Процесс расчета требуемой машины геометрически соответствует преобразованию от простейшей системы координат (обобщенной машины), в которой проекции тензора (абстрактной машины) известны, к проекциям тензора в системе координат, которая определяется схемой соединения обмоток машины с помощью матрицы соединения.

Введение тензоров было подготовлено исторически развитием теории электротехники. Кирхгоф в 1847 г. впервые доказал математически существование решения электрической цепи, состоящей из со-

противлений и источников. В 1865 г. Д. Максвелл ввел понятие потенциала [Максвелл, 1873], разработал контурный и узловый методы расчета цепей. Математик Г. Вейль дал в 1923 г. [Weyl, 1923] другое, топологически более глубокое доказательство, причем он же начал представлять ток и напряжение как контравариантные и ковариантные векторы. В теорию электрических машин тензоры ввел Г. Крон.

Главное достоинство тензоров в том, что они преобразуются по линейным законам. Другие геометрические объекты преобразуются по более сложным законам.

Простейшим примером нетензорной величины является дифференциал вектора, например вектора тока. В самом деле, из уравнения (1.72) получим

$$di^m = d(i^\pi C_\pi^m) = di^\pi C_\pi^m + i^\pi \frac{\partial C_\pi^m}{\partial x^\sigma} dx^\sigma, \quad (1.74)$$

откуда видим, что помимо тензорной части преобразования $di^\pi C_\pi^m$ имеется дополнительный член, являющийся функцией мгновенной скорости.

В уравнении (1.63) e_k и $R_{mk} i^m$ — тензоры. Из уравнения (1.74) видно, что di^m/dt не тензор

$$\frac{di^m}{dt} = \frac{di^\pi}{dt} C_\pi^m + i^\pi \frac{\partial C_\pi^m}{\partial x^\sigma} i^\sigma, \quad (1.75)$$

$\Gamma_{mn,k} i^m i^n$ также не тензор, поскольку $\Gamma_{mn,k}$ имеет следующую формулу преобразования, которую приведем без доказательства:

$$\Gamma_{e\sigma,\pi} = \Gamma_{mn,k} C_e^m C_\sigma^n C_\pi^k + L_{mk} \frac{\partial C_e^m}{\partial x^\sigma} C_\pi^k. \quad (1.76)$$

Однако в сумме эти два члена образуют тензор. Этот тензор — так называемая ковариантная производная вектора (тока) по времени, обозначаемая $\delta i/dt$

$$L_{mk} \frac{\delta i^m}{dt} = \frac{di^m}{dt} + \Gamma_{mn,k} i^m i^n. \quad (1.77)$$

Ковариантная производная совпадает с обычной производной в декартовых координатах, например, для машин с неподвижными координатными осями, когда все $L_{\alpha\beta}$ — константы и значения символа Кристоффеля равны нулю. Тогда уравнение напряжения принимает вид

$$e_k = R_{mk} i^m + L_{mk} \frac{\delta i^m}{dt}, \quad (1.78)$$

т. е. аналогично уравнению напряжения для неподвижной электрической сети, возбуждаемой переменным током,

$$e_{\alpha} = R_{\alpha\beta} i^{\beta} + L_{\alpha\beta} \frac{di^{\beta}}{dt} \quad (1.79)$$

с той разницей, что обычное дифференцирование заменяется ковариантным дифференцированием.

Рассмотрим геометрический смысл символов Кристоффеля и ковариантной производной. Как указывалось, при любом режиме работы электрической машины — ускорении, качании или стационарном режиме — в ней происходит такое же физическое явление, как и в неподвижных электрических сетях; оно описывается уравнением (1.46).

Также из уравнений для электрических машин можно получить тензорные уравнения неподвижных сетей, ветви которых могут быть самыми различными устройствами.

«Когда сопротивления, индуктивности, трансформаторы, электронные лампы и т. д. произвольным образом соединены с вращающимися машинами, каждое устройство рассматривается как вращающаяся машина или, лучше сказать, каждая вращающаяся машина рассматривается как простой импеданс» [Крон, 1934]. Возникает вопрос: в чем отличие электрических машин от неподвижных сетей в математическом отношении?

Математически поведение машины описывается движением представляющей точки в n -мерном пространстве. Для различных режимов работы машины это пространство оказывается различным. Рассмотрим это несколько подробнее.

Пусть мы рассматриваем матрицу индуктивностей $L_{\alpha\beta}$ как метрический тензор. Если электрическая цепь из n ветвей неподвижна и в ней протекают постоянные токи под действием приложенных напряжений $e_{\alpha} = R_{\alpha\beta} i^{\beta}$, то магнитное взаимодействие отсутствует, следовательно, $L_{\alpha\beta}$ представляется диагональной матрицей сопротивлений $R_{\alpha\beta}$. Геометрически это соответствует n -мерному евклидову пространству с ортогональными криволинейными координатами, т. е. даже в этом простейшем случае электрической цепи декартовы (прямолинейные прямоугольные) системы координат неприменимы, что подтверждается существованием нетождественных друг другу по типу преобразования ковариантных (напряжения) и контравариантных (токи) векторов (см. гл. 2). Состояние цепи описывается точкой в таком пространстве.

Пусть теперь по-прежнему в неподвижной цепи протекают переменные токи. В этом случае имеется магнитное взаимодействие, описываемое симметричным тензором переходного импеданса $Z_{\alpha\beta}$ по уравнению (1.79):

$$e_{\alpha} = Z_{\alpha\beta} i^{\beta} = R_{\alpha\beta} i^{\beta} + L_{\alpha\beta} \frac{di^{\beta}}{dt} \quad (1.80)$$

Поведение таких неподвижных цепей, к которым относятся, например, трансформаторы, описывается движением точки в том же пространстве.

Если некоторые ветви в цепи, например обмотки ротора, движутся с постоянной скоростью, то уравнение напряжения такой системы можно записать как

$$e_{\alpha} = Z_{\alpha\beta} \dot{i}^{\beta} = (R_{\alpha\beta} + \Gamma_{\beta t, \alpha} \dot{i}^t) \dot{i}^{\beta} + L_{\alpha\beta} \frac{d\dot{i}^{\beta}}{dt}. \quad (1.81)$$

Здесь члены в скобках эквивалентны сопротивлениям, а поскольку $\Gamma_{\alpha\beta, t} = 0$, то режим внезапного короткого замыкания вращающейся машины при поддержании постоянной скорости можно представить движением частиц в n -мерном евклидовом пространстве с косоугольными декартовыми координатными осями (пример преобразования таких координат рассмотрен в § 1.3), как если бы вращающиеся машины были неподвижными системами.

Как было сказано, режим вращающейся машины при ускорении можно представить движением частицы в n -мерном римановом пространстве, поскольку в уравнении (1.63) $\Gamma_{mn, t} \neq 0$ (см. также 1.66).

Таким образом, при ускоренном движении электрической цепи евклидово пространство искривляется и становится римановым. Геометрически это означает, что при параллельном переносе по разным путям вектор имеет различную ориентацию. (Физически это приводит к появлению дополнительной составляющей напряжения, обусловленной вращением и названной Кроном «кориолисово» напряжение — по аналогии с кориолисовой силой, действующей на тела на поверхности Земли и обусловленной вращением Земли.)

При переносе вектора вдоль некоторой кривой (геодезической линии) в римановом пространстве вектор уже оказывается не параллельным сам себе (относительно евклидова пространства, в которое вложено данное риманово), а повернут на некоторый угол. Поэтому при построении разности значений функции в двух точках вдоль этой кривой необходимо вносить поправку на изменение вектора. Именно это и учитывается введением символов Кристоффеля в ковариантном дифференцировании.

Таким образом, при ускоренном вращении гравитационная масса ротора проявляется (в чисто электромагнитной до этого системе) в том, что все обычные производные в уравнении напряжения заменяются на ковариантные производные, что соответствует движению представляющей точки уже в криволинейном римановом пространстве. Поскольку мы не вращаемся вместе с машиной, а находимся в евклидовом пространстве, в которое погружено риманово пространство машины, то эффекты, связанные с криволинейностью последнего, проявляются для нас, например, в появлении «кориолисова» напряжения.

Из сказанного можно увидеть аналогии между пространствами вращающихся электрических машин и общей теорией относительности. Разумеется, речь идет о нерелятивистских эффектах, поскольку машины вращаются со скоростью, значительно меньшей скорости света. И тем не менее роль гравитационной массы ротора при ускорении аналогична роли гравитационных масс, как бы искривляющих наше пространство. Это было экспериментально подтверждено измерениями отклонения положения небесных тел от вычисленного при прохождении света вблизи Солнца во время солнечного затмения).

Нериманово пространство релятивистской динамики и классической динамики для электрических машин подчиняется одному и тому же ограничению: ковариантные производные метрического тензора $g_{\alpha\beta}$ равны нулю.

Подобно тому, как при релятивистских скоростях наше пространство перестает быть евклидовым и становится римановым, а в некоторых случаях и неримановым, так и вращающиеся машины при ускорении должны представляться в римановом, а при качаниях — в неримановом пространствах.

Итак, геометрия мира электрических машин очень похожа на геометрию мира общей теории относительности, что и позволило Эйнштейну говорить Крону о том, что последний распространяет в область техники идеи теории относительности.

Глава 2.

ТЕНЗОРЫ В ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ НА ПРОСТРАНСТВЕ-СТРУКТУРЕ

Спрашивайте природу, она хранит все истины и на вопросы ваши будет отвечать вам непременно и удовлетворительно.

Бэкон

В этой главе главным героем будет электрическая цепь. Такая почесть оказана ей неспроста, потому что тензорный анализ цепей играет центральную роль в тензорной методологии, ее практическом применении. Цепь объединяет в своих понятиях, и притом наглядно, структуру и протекающие в структуре процессы. Сама цепь, ее теория, за полтора века изучены достаточно подробно. Введение тензоров потребовало дальнейшего развития этой теории. Возникла необходимость определить пространство для таких тензоров. Это оказалось необычное пространство — структура самой цепи. Преобразования та-

кого пространства суть разрывания и соединения связей между элементами. Тензорные понятия инварианта преобразований, метрики, ковариантности и контравариантности оказались здесь далеко за пределами своей «экологической ниши», в необычном и непривычном контексте.

Полученные на этой основе методы расчета не только на практике доказали свою работоспособность, но и позволили использовать их в качестве эталона для расчета любых других систем, которые удавалось представить эквивалентными моделями в виде электрических цепей. Простота и наглядность сделали цепь более удобным «полигоном» для изучения и обобщения тензорных понятий, чем вращающиеся электрические машины (электромеханические преобразователи энергии), поэтому тензорный анализ цепей (в более широком смысле — сетей) стал развиваться параллельно. На нем сфокусировались развитие тензорной методологии, ее приложения в теории систем, а также дискуссии и споры.

2.1. ГЕОМЕТРИЯ НОВОГО ТИПА И НЕДОПУСТИМЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

«Тензорный анализ сетей» Г. Крона впервые был опубликован в 1939 г., а в 1965 вышло второе издание, точная копия первого, но с новым предисловием автора. В этом предисловии даны перспективы обобщения тензорного анализа на сети из многомерных элементов (плоскости, объемы и т. д.), реализующие структуру абстрактных объектов изучения комбинаторной топологии — симплициальных комплексов. Перевод книги в СССР был издан в 1978 г.

Основные положения применения тензоров в электротехнике были изложены Кроном в первых двух статьях серии из 17 статей под общим названием «Применение тензоров к анализу вращающихся электрических машин» в 1936—1938 гг., которая вышла отдельной книгой в 1942 г. Здесь были сформулированы постулаты обобщения, понятия простейшей и соединенной цепи, преобразования сетей с помощью группы матриц, оставляющих инвариантом величину рассеиваемой мощности. Эти понятия включают как все основные моменты тензорного метода, так и возникающие трудности.

Наиболее важным оказалось введение в теорию электрических сетей и машин трех фундаментальных понятий современной геометрии: преобразований, инварианта и группы. Это позволило сопоставить геометрические аспекты тензорного метода расчета сетей с другими геометриями, принцип классификации которых предложил немецкий математик Ф. Клейн в 1972 г. в известной Эрлангенской программе.

Согласно этому принципу каждая геометрия характеризуется преобразованиями, которые допускаются в ней производить над геометрическими объектами, а также свойствами этих объектов, которые не изменяются, остаются инвариантны при этих преобразованиях. То есть,

каждая геометрия определяется группой¹ преобразований, оставляющих инвариантными те или иные свойства геометрических фигур.

Оказалось, что тензорному анализу сетей соответствует геометрия нового типа, не сводимая к известным геометриям. В самом деле, рассмотрим известные типы геометрий (рис. 2.1):

1. Евклидова геометрия допускает преобразования, не меняющие форму фигур. Можно переносить, вращать, даже зеркально отражать фигуры и при этом изменять их масштаб, но квадрат должен остаться квадратом, а параллелограмм — параллелограммом.

2. Аффинная геометрия в дополнение к этому допускает такие деформации фигур, при которых прямые линии переходят в прямые, а параллельные — в параллельные. Параллелограмм и квадрат здесь — это одна и та же геометрическая фигура.

3. В проективной геометрии параллельные линии при проектировании могут стать не параллельными, но прямые продолжают переходить в прямые. Квадрат можно преобразовать в произвольный четырехуголь-

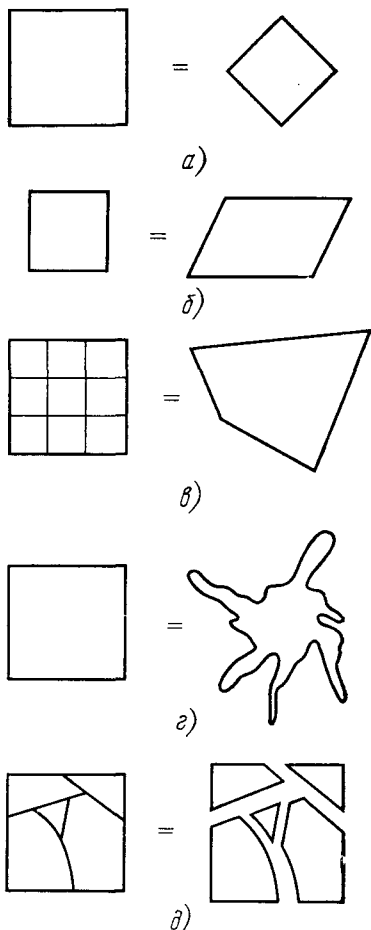


Рис. 2.1. Примеры классификации геометрий по эрлангенской программе Ф. Клейна:

а — геометрия Евклида; б — аффинная геометрия; в — проективная геометрия; г — топология; д — топология разрыва Г. Крона

ник, поскольку они могут представлять одну и ту же геометрическую фигуру при проектировании из разных точек.

4. В топологии уже допустимы почти любые преобразования: фигуры можно изгибать, мять, деформировать, но при этом точки по-

¹Короче говоря, множество предметов, над которыми разрешена одна операция, образует группу, если: выполнение этой операции над элементами не выводит результат за пределы данного множества; всякому действию есть обратное, возвращающее в прежнее положение. Например, операция сложения над множествами рациональных чисел (см. также прим. на с. 47).

прежнему должны принадлежать линиям, линии — поверхностям и т. д. Сохраняется свойство принадлежности. Квадрат и клякса представляют одну фигуру (если только в кляксе нет дырок).

5. Однако рассматриваемые нами преобразования типа преобразований электрических сетей и машин аналогичны тому, что допускают также разделение на части и соединение фигур произвольным образом. Например, квадрат и любое его разрезание на кусочки представляют одну фигуру. Таким образом, преобразования сетей требуют введения геометрии нового типа.

Преобразования разрывания и соединения играют важную роль в расчете, проектировании сложных систем. Проектирование во многом заключается в соединении из элементов, устройств, конструкций некоторой системы, обеспечивающей достижение заданного результата, цели. Но если мы допускаем разрывания, то свойство принадлежности уже не является инвариантом такой группы преобразований. Что же сохраняется? Ведь при преобразованиях, изменениях, что-то должно сохраняться, оставаться неизменным, иначе мы никогда не можем предсказывать, к чему приведут наши преобразования. Например, мы можем выйти за пределы рассматриваемого пространства и потеряем возможность как-либо интерпретировать результаты.

При разрывании и соединении на плоскости геометрических фигур постоянной остается их площадь, т. е. мы можем с каждой фигурой сопоставить некоторое число (квадратичную форму, представляющую собой произведение длин сторон квадрата, а для более сложной фигуры — сумму площадей более мелких фигур, на которые ее можно разбить). Это число — суммарная площадь — одно и то же как для квадрата, так и для любого разделения его на куски произвольной формы. Заметим, что для других геометрий площадь не была инвариантом преобразований.

В связи с необходимостью рассматривать новый тип геометрии, возникает два вопроса:

1. Что является инвариантом рассматриваемой группы преобразований, т. е. что остается постоянным, сохраняется в сетях при преобразованиях разделения и соединения их структуры?

2. Поскольку геометрия, в основном, есть теория пространства, то чем отличается пространство такой геометрии от уже известных? В чем заключаются его особенности, основные свойства?

В этой главе больше рассмотрен первый вопрос, поскольку он является ключевым для теоретического построения тензорного анализа сетей. Оказывается, что инвариантом преобразований структуры также является квадратичная форма, связанная с каждым элементом сети. Для электрических цепей роль такой формы играет мощность, рассеиваемая на ветвях цепи. Сохранение мощности оказалось неотъемлемым аспектом построения тензорных формул преобразования величин при изменении структуры цепи. Крон вводил инвариантность мощности в качестве постулата, следствием которого является формула

преобразования напряжения, используемая затем для получения формулы преобразования импеданса и т. д.

Однако просто утверждать, что мощность сохраняется, оказалось недостаточно. Дело в том, что сколько раз ни произноси слово «инвариант», от этого не легче — в большинстве случаев мощность изменяется при изменении структуры цепей. Казалось бы, на этом можно поставить точку и рассматривать тензорный анализ сетей Крона как математический курьез, красивую, но практически бесполезную игрушку.

Парадокс заключается в том, что методы расчета цепей (и сложных систем, представленных эквивалентными моделями в виде цепей), опирающиеся на формулы преобразования тензорного метода Крона, дают правильные результаты! То есть, если по этим формулам рассчитать отклики (токи и напряжения) в цепи, возникающие в ответ на приложенные воздействия (напряжения или токи соответственно), то эти отклики на ветвях удовлетворяют законам Кирхгофа, закону Ома, следовательно, представляют собой решение задачи цепи. Разумеется, эти решения полностью совпадают с решениями, полученными другими методами.

Такое несоответствие: предпосылка ложная, а результат истинный — является, по-видимому, одной из главных причин некоторого недоверия многих ученых и инженеров как к тензорным методам в электротехнике, так и применению их для моделирования, расчета, проектирования других сложных систем. Эта загадка наряду с другими, в том числе субъективными причинами является препятствием распространению тензорных методов в практику научных исследований и инженерных расчетов. Поэтому необходимо подробно рассмотреть процесс построения тензорных формул преобразования структур. Наличие явного противоречия между причиной и следствием есть указание на то, что должно существовать диалектическое разрешение противоречия в рамках более широкой, более общей теории. Частным случаем такой теории должна быть рассматриваемая теория, в данном случае — тензорный анализ сетей. В этой главе мы увидим, что так оно и есть.

Мощность оказалась действительно инвариантом группы преобразований, но более широкой группы преобразований структуры в пространстве цепей. И вот здесь мы подошли ко второму вопросу. Что же это за пространство цепей (а в более общем случае сетей передачи потоков, в данном случае потоков энергии)?

Понятие пространства, как мы помним из гл. 1, эволюционировало от «места, в котором можно двигать фигуры», до «совокупности точек, связанных структурой отношений». Роль связывающей точки структуры растет и развивается в понятие пространства сетей. Физически это уже пространство-структура. Оно состоит из элементов сети, ветвей, соединенных тем или иным способом. То есть это пространство дискретное в том смысле, что оно существует только вдоль выделенных

линий — ветвей, «погруженных» в обычное геометрическое пространство или рассматриваемых отдельно. Сами ветви и последовательности ветвей образуют в этом пространстве пути, по которым могут распространяться потоки. Таким образом, объектами этого пространства, его линиями, состоящими из точек, являются пути. Геометрия путей развивалась многими математиками, такими, как Веблен, Уайтхед, Эйзенхарт и др., в первой половине нашего века, но потом была почти забыта, а во многих чертах слилась с комбинаторной топологией, в которой рассматриваются вопросы, связанные со структурами, состоящими из соединенных элементов. Пути там называются цепями, ветви — симплексами, сеть — комплексом, совокупность по-разному соединенных в сети элементов — полиэдром и так далее, причем эти понятия исследуются абстрактно, для многомерных случаев и т. д. Сети, которые рассматриваем мы, одномерны.

Мы воспользуемся методами комбинаторной топологии при решении таких вопросов, как, например, сколько и каких путей надо выбрать в сети, чтобы выразить через них все остальные, построить таким образом базис и с его помощью систему координат, а затем преобразование этих координат, и, наконец, как при этом преобразуются величины, т. е. все, что связано с понятием пространства.

Однако комбинаторная топология не изучает вопросов, касающихся форм, в данном случае — чисел, связанных с ветвями сети. То есть в ней нет аналогов понятиям импеданса и мощности, а это для нас важно.

Итак, мы должны рассмотреть пути, виды путей, преобразования одних систем путей в другие, формулы этих преобразований, а затем применять этот аппарат для расчета и проектирования других, в том числе неэлектрических сложных систем, искать способы, методы его обобщения на сети из многомерных элементов и т. д.

Ветви для нас представляют собой пути распространения потоков — в данном случае потоков электрической энергии. Поток имеет направление. Чтобы это учитывать, для каждой ветви выбирается ориентация, которую на схемах будем указывать стрелкой. Направление по стрелке — плюс, против — минус. Ветви и последовательности ветвей, как было сказано, образуют пути.

Пути могут быть двух типов. Если с конца одной ветви (называют иначе вершины или узла) пройти по ветви до другого ее конца, узла, затем перейти к ветви, которая соединена с этой, пройти по ней и т. д., и в конце концов вернуться к началу пути (исходному узлу), то такой путь называется *замкнутым*. Если начало пути не совпадает с концом, то такой путь называется *разомкнутым*. В теории цепей замкнутые пути называются *контурами*. Для разомкнутого пути главную роль играют узлы начала и конца, поэтому эквивалентом этому понятию в теории цепей является пара узлов.

Например, на рис. 2.2 ветви 1, 3, —4, —2 образуют замкнутый путь, а ветви —1, 2, 5, а также 1, 3, —4 — разомкнутые пути.

Каждая ветвь представляет собой самостоятельный элемент пространства, совокупность точек которого не выражается через другие ветви. Следовательно, размерность этого пространства равна числу ветвей. Если мы возьмем набор отдельных, не соединенных n ветвей, то они вместе составят пространство n измерений. Каждая ветвь образует путь. Если все ветви замкнуты, то имеем пространство замкнутых путей.

Пусть теперь ветви соединены и образуют сеть, обладающую некоторой структурой. До этого мы могли выбрать систему координат единственным образом — задав пути вдоль каждой ветви. Теперь в полученной структуре пути уже можно выбрать по-разному. Чтобы получить систему координат, мы должны определить систему независимых путей в сети, т. е. таких путей, которые не выражаются через другие, в то время как любой другой путь можно представить в виде комбинации из этих выбранных путей.

В этой связи возникает, очевидно, вопрос: как складывать и вычитать пути? Будем считать, что сумма путей — это такой путь, который сначала проходит по ветвям первого пути (по его направлению), а затем по ветвям второго пути (по его направлению). Разность путей — это путь, проходящий сначала по ветвям первого пути в его направлении, а затем по ветвям второго пути, противоположно его направлению. То есть, разность — это путь, остающийся при «вычитании» из первого пути ветвей второго пути с учетом их ориентации.

Например, на рис. 2.2 путь, который обозначим как $1'$, состоит из шести ветвей (в порядке их прохождения): $1' = 1 + 3 + 7 - 6 - 5 - 2$, а путь, который обозначим как $2'$, из четырех ветвей: $2' = 4 + 7 - 6 - 5$. Сумму путей $1'$ и $2'$ можно проследить по порядку прохождения их ветвей: $1' + 2' = -2 + 1 + 3 + 7 - 6 - 5 + 4 + 7 - 6 - 5$. Их разность есть путь $3'$, показанный пунктиром: $3' = 1' - 2' = -2 + 1 + 3 + 7 - 6 - 5 - 4 - 7 + 6 + 5 = 1 + 3 - 4 - 2$.

В более общем виде эти вопросы рассматриваются в учебниках по комбинаторной топологии. Мы показали, что пути можно складывать и вычитать почти как обычные числа, и больше на этом останавливаться не будем, поскольку наша основная задача состоит в том, чтобы выражать пути в одной сети через пути в другой сети и получать таким образом преобразование систем координат в нашем пространстве.

Сколько же независимых путей, замкнутых и разомкнутых, образовалось в структуре соединенной сети? Их преобразования мы будем

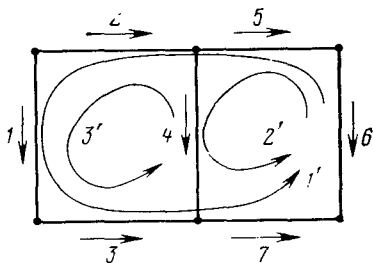


Рис. 2.2. Выбор замкнутых и разомкнутых путей в структуре соединенных одномерных ветвей

в дальнейшем использовать для расчета электрических цепей, в которых важную роль играют законы Кирхгофа. Пока проведем следующие рассуждения.

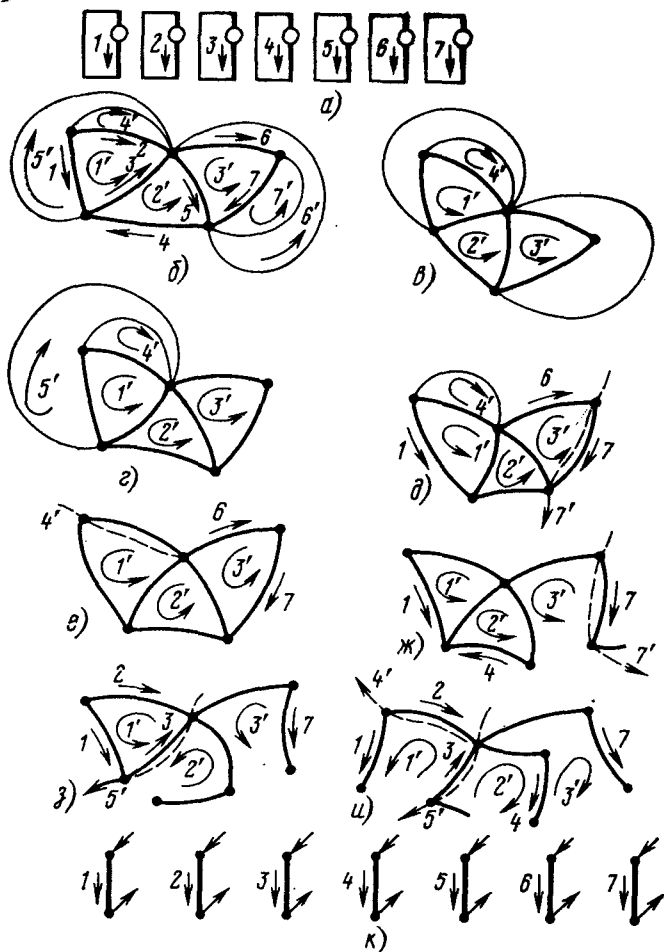
Ветви соединяются друг с другом концами. В соединениях образуются узлы. Если до соединения все ветви были разомкнуты, то каждая имеет два конца (любая палка, как известно, о двух концах), т. е. два узла. Если несоединенных ветвей n , то узлов было $2n$, а независимых разомкнутых путей столько же, сколько ветвей — n . Сколько их стало в соединенной цепи?

Соединим две ветви. На один узел станет меньше: получится три узла. Присоединим еще ветвь одним узлом. Она «потеряет» этот узел, но в цепи появится новый узел — ее свободный конец. Узлов станет четыре, а ветвей — три. Каждая новая ветвь добавит, где бы мы ее ни присоединили, один новый узел (если не присоединять оба узла сразу), следовательно, число узлов в цепи J равно числу ветвей n плюс один: $J = n + 1$.

Если цепь состоит из s частей, не связанных ветвями друг с другом, то, проводя те же рассуждения для каждой отдельной части, получим, что в каждой из них имеется по одному «лишнему» узлу в дополнение к числу ветвей. Всего ветвей n , следовательно, число узлов в такой цепи J_s : $J_s = n + s$.

Разомкнутый путь входит в один узел и выходит из другого. Выбрав какой-нибудь путь, мы охватим два узла. Проведем каждый новый путь так, чтобы он охватывал один использованный и один новый узел. Добавляя по одному узлу в каждый новый путь, мы получим, что все узлы будут охвачены за n шагов. Каждый новый путь будет входить и выходить из уже использованных узлов, следовательно, его можно будет выразить как сумму или разность уже построенных путей, т. е. каждый такой новый путь будет линейно зависимым и не будет определять собой новую ось координат в пространстве цепи. Итак, в нашей цепи независимых разомкнутых путей столько же, сколько ветвей, т. е. размерность пространства прежняя. Контуров пока нет; структура такой цепи в теории графов называется *дерево*. Оно изображено на рис. 2.3, и для цепи из семи ветвей.

Согласно построению, можно из каждого узла перейти в любой другой. Соединим теперь один узел с любым другим. На один узел в цепи станет меньше, следовательно, и на один независимый разомкнутый путь станет меньше. Пространство таких путей «сожмется» на одно измерение, но этот путь станет замкнутым (см. рис. 2.3, з), т. е. в цепи появится один контур, причем его нельзя представить в виде комбинации других путей, следовательно, надо рассматривать как независимое измерение. Значит, пространство путей сохранит свою прежнюю размерность, равную числу ветвей, но теперь состоит из совокупности подпространств — разомкнутых и замкнутых путей.



Р и с. 2.3. Различные структуры (сети), которые можно соединить из семи одномерных ветвей. Пути в этих сетях выбраны одинаково, но число замкнутых и разомкнутых путей различно:

а — отдельные ветви, образующие замкнутые пути; *б* — ветви соединены в структуру, образуя семь замкнутых путей (контуров), пронумерованных от 1' до 7'; *в* — путь 7' разомкнут, остальные шесть замкнуты и образуют по-прежнему контуры; *г* — пути 7' и 6' разомкнуты, остальные замкнуты; *д* — пути 7', 6', 5' разомкнуты; *е* — пути 7', 6', 5', 4' разомкнуты, 1', 2', 3' замкнуты; *ж* — пути 1' и 2' замкнуты, остальные разомкнуты; *з* — путь 1' замкнут, остальные разомкнуты; *и* — все пути разомкнуты и образуют разомкнутые (или открытые) пути, замкнутых путей, контуров нет; *к* — отдельные ветви, образующие разомкнутые пути

Дополним наши обозначения. Для краткости будем замкнутые пути обозначать как m -пути, а разомкнутые — как j -пути¹. Эти же буквы будем использовать для указания, к какой системе путей относится та или иная величина.

Последовательно соединяя узлы цепи друг с другом, мы будем сокращать число узлов и ровно на столько же увеличивать число контуров. Соответственно будет сокращаться подпространство j -путей и увеличиваться подпространство m -путей. Соединив последние два узла, мы превратим последний j -путь в m -путь. В цепи останется один узел, а пространство путей превратится в пространство m -путей (контуров), причем теперь $m = n$, т. е. размерность пространства останется прежней.

Любой контур сверх числа линейно независимых можно выразить в виде их комбинации. Итогом этого небольшого упражнения из области комбинаторной топологии является полученное нами соотношение

$$n = m + j, \quad (2.1)$$

которое показывает, что при любой структуре цепи число независимых замкнутых и разомкнутых путей постоянно и равно числу ветвей. Тот же результат можно получить другими, более строгими математическими рассуждениями, как это делал, например, известный математик Г. Вейль в статье 1923 г. [Weyl, 1923].

Наша цель вполне практическая — получить уравнения соединенной цепи.

Теперь перейдем к рассмотрению физических величин, связанных со структурой цепи. По ветвям цепи протекают электрические токи. Они взаимодействуют с материалом ветвей, который характеризуется наличием сопротивления, индуктивности, емкости. При этом взаимодействии в цепи возникает некоторое распределение потенциалов. Разность потенциалов между различными точками цепи (например, узлами) характеризует напряжение на данном участке. Токи, напряжения, сопротивления (при наличии индуктивностей — комплексные сопротивления или импедансы) связаны известным законом Ома.

Если у нас не одна ветвь, а несколько отдельных ветвей; то в каждой из них имеют место эти явления. Следовательно, совокупность отдельных ветвей характеризуется n токами, n напряжениями, n сопротивлениями (импедансами). Задача расчета формируется двумя двойственными способами:

1) к о н т у р н ы й: задано напряжение e на ветви z (например, в ветви включен источник э. д. с.). Надо найти ток i из закона Ома, $e = zi$.

2) у з л о в о й: задан ток I в ветви с проводимостью Y (например, ветвь подключена к источнику тока). Надо найти разность потенциалов E из закона Ома $I = YE$.

¹ От английских слов mesh — контур, junction — узел.

Пусть теперь ветви соединены в цепь. Если все ветви соединены друг с другом, то согласно вышеприведенным рассуждениям $s = 1$. Узлов в цепи J , тогда независимых пар узлов $j = J - s = J - 1$, а контуров $m = n - j$. Поскольку токи протекают по замкнутым путям, то достаточно выбрать m контуров в цепи, тогда любой другой ток будет выражен в виде комбинации выбранных. Следовательно, нужен расчет только m токов в контурах для определения всех токов в ветвях¹.

Аналогично, если цепь узловая, т. е. заданы токи, то поскольку разности потенциалов возникают между узлами, а независимых пар узлов j , то достаточно выбрать j разомкнутых путей, связанных с этими парами узлов, и определить разности потенциалов на них. Любые другие разности потенциалов можно выразить в виде комбинации этих выбранных разностей.

Таким образом, на основании рассмотренных структурных отношений между ветвями цепи мы получили, что при любых преобразованиях ее структуры количество переменных (размерность пространства цепи) остается постоянным, равным количеству ветвей, хотя, в зависимости от вида структуры, распределение количества замкнутых и разомкнутых путей (два непересекающихся подпространства, составляющих пространство цепи) может изменяться.

Для расчета цепей с помощью тензоров остается еще уточнить обстоятельство, связанное с переходом от отдельной ветви к цепи из многих ветвей. При таком переходе мы предполагаем, что полученная при соединении система продолжает описываться такими же по форме уравнениями, как и отдельная ветвь, но каждый символ в уравнении теперь представляет собой не отдельное число, а матрицу соответствующего порядка. Крон называл это допущение «постулат первого обобщения». Постулат второго обобщения связан с переходом к рассмотрению всех различных цепей как одной обобщенной цепи. Он утверждает, что цепь из тех же n ветвей описывается уравнением такого же вида, как отдельная конкретная цепь, но при этом каждый член в уравнении поведения становится тензором. Этот постулат соответствует нижнему тензорному уровню, о котором мы говорили в первой главе.

2.2. ТЕНЗОРЫ РАССЧИТЫВАЮТ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

Как же используются тензорные понятия для расчета электрических цепей? Какие возникают при этом новые проблемы? Чтобы разобраться в этом, представим два метода расчета цепей — контурный и узловой — как симметричные, двойственные, так, что один

¹Между токами в ветвях и токами, выбираемыми в контурах, есть существенная разница. Подключая к ветви амперметр, можно измерить ее ток. Измерить ток в контуре, вообще говоря, нельзя: каждая ветвь, составляющая контур, может входить и в другие контуры.

из них получался бы из другого при соответствующей замене обозначений.

Представим себе, что у нас есть несколько проводников (проводок), электрические сопротивления которых известны. В общем случае это могут быть комплексные сопротивления (импедансы), поскольку не исключено, что эти проводники обладают собственной индуктивностью. Если при изменении тока в проводниках индуцируется ток в других проводниках, то имеются также взаимные индуктивности.

Часть проводников (или все) может содержать источники воздействия: генератор напряжения e (если проводник замкнут) или генератор тока I (если проводник разомкнут). В последнем случае можно мысленно представить себе, что генератор напряжения удален за пределы цепи и работает как источник, ток которого не зависит от нагрузки.

Проводники (с источниками или без) будем называть *ветвями*. Характеристики замкнутых ветвей (генератор напряжения) будем обозначать строчными буквами (e, i, z), а разомкнутых (генератор тока) — прописными (I, E, Y).

В каждой замкнутой ветви действует закон Ома для контура

$$e = zi. \quad (2.2)$$

В каждой разомкнутой ветви действует закон Ома для пары узлов $I = YE$, где $Y = 1/z$ — обратная импедансу проводимость (комплексная проводимость).

Для всех ветвей вместе можно записать закон Ома в виде системы уравнений — от первой ветви, которую пронумеруем 1, до последней, номер которой n . Исходя из первого постулата Крона, эту систему можно записать в виде одного уравнения

$$e_\alpha = z_{\alpha\beta} i^\beta \quad \text{или} \quad I^\alpha = Y^{\alpha\beta} E_\beta,$$

где индексы α и β поочередно принимают все значения от 1 до n . Каждый символ теперь представляет не отдельное число, а сразу целую совокупность чисел — матрицу, в которой числа могут располагаться в строку или столбец, например

$$e_\alpha = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_n \end{vmatrix} \quad (2.3)$$

$$I^\alpha = \begin{vmatrix} I^1 & I^2 & \dots & I^n \end{vmatrix}$$

(одномерные матрицы представляют собой вектор), или в виде двумерной матрицы, например

$$z_{\alpha\beta} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline z_{11} & z_{12} & \dots & z_{1n} \\ \hline z_{21} & z_{22} & \dots & z_{2n} \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline z_{n1} & z_{n2} & \dots & z_{nn} \\ \hline \end{array}$$

и т. д.

На главной диагонали находятся значения собственных сопротивлений, индуктивностей, емкостей каждой ветви, составляющих комплексное сопротивление (собственный импеданс), а в остальные клетки удобно записывать взаимные индуктивности (взаимные импедансы), показывающие электромагнитную связь ветвей друг с другом. Если такой связи нет, то в соответствующих клетках записываются нули, которые мы будем опускать, оставляя просто пустые места.

В отдельной ветви при прохождении тока рассеивается мощность, равная $P = ei$ или $P = IE$. В совокупности ветвей полная мощность P равна сумме мощностей отдельных ветвей P_α :

$$P = \sum_{\alpha} P_{\alpha} = e_1 i_1 + \dots + e_n i_n \text{ или}$$

$$P = \sum_{\alpha} P_{\alpha} = I_1 E_1 + \dots + I_n E_n.$$

Задача состоит в том, чтобы рассчитать отклик в каждой ветви по заданным воздействиям. В случае отдельной ветви это сделать легко — надо просто решить соответствующее уравнение закона Ома:

$$\text{для контура } i = e/z = z^{-1}e,$$

$$\text{для пары узлов } E = I/Y = Y^{-1}I.$$

Для многих отдельных ветвей задача усложняется, поскольку надо решать целую систему уравнений. Если взаимных индуктивностей нет, то система распадается на отдельные уравнения, подобные уже решенным, так что надо просто решить эти уравнения одно за другим.

Если взаимные индуктивности есть, то придется решать систему линейных уравнений одним из известных способов, скажем, методом последовательного исключения переменных. В общем виде решение выглядит так:

$$\text{для контуров } i^{\beta} = (z_{\alpha\beta})^{-1} e_{\alpha},$$

$$\text{для пар узлов } E_{\beta} = (Y^{\alpha\beta})^{-1} I_{\alpha}.$$

Символы типа A^{-1} обозначают теперь не обратное число, а обратную матрицу, смысл этого почти такой же, как и для отдельного числа: $AA^{-1} = I$, где I обозначает матрицу, на главной диагонали которой единицы, а остальные элементы нули. Разница в том, что вычисле-

ние обратной матрицы нельзя произвести так же просто, как нахождение обратного числа. Для этого существуют специальные методы и алгоритмы. Если размер матрицы (число строк и столбцов) велик, то вычисление становится очень трудоемкой процедурой и представляет собой отдельную проблему.

Тем не менее принципиальных трудностей мы не встретили и расчет откликов на приложение воздействия стал просто вопросом вычис-

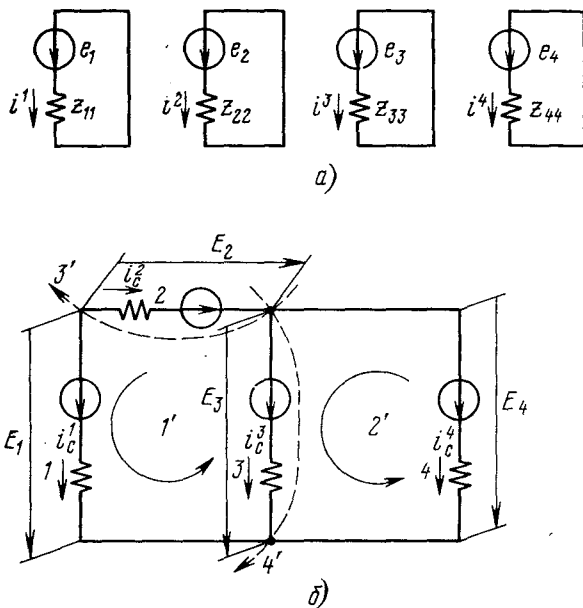


Рис. 2.4. Величины на ветвях электрической цепи при возбуждении источниками напряжения:

a — простейшая цепь из четырех отдельных ветвей, возбуждаемых источниками напряжения E_{α} ; *б* — те же ветви, соединенные в структуру, выбор замкнутых и разомкнутых путей в этой структуре, величины, возникающие на отдельных ветвях

лений. Заметим, что $z_{\alpha\beta} = (Y^{\alpha\beta})^{-1}$, так что задав импедансы, при расчете получаем значения комплексных проводимостей и наоборот.

В отдельных ветвях каждый ток протекал по своему пути, который определен структурой контура, а каждое напряжение возникало как разность потенциалов на двух узлах, определенных как конечные точки разомкнутого пути. Все эти величины показаны на рис. 2.4 и 2.5.

Пусть теперь ветви соединены между собой в сеть и образуют некоторую структуру. Здесь возникают трудности, которых раньше не было. Прежде всего мы не можем теперь, как раньше произвести

расчет откликов на воздействия. Хотя источники остались прежние, но отклики в общем случае изменяются. Уравнения примут, по-видимому, какой-то другой вид, потому что ветви соединены, взаимодействуют и мы не можем составить систему уравнений, просто записывая одно за другим уравнения отдельных ветвей.

Постулат второго обобщения Крона (и наш нижний тензорный уровень) утверждает, что электрические цепи из одних и тех же по-

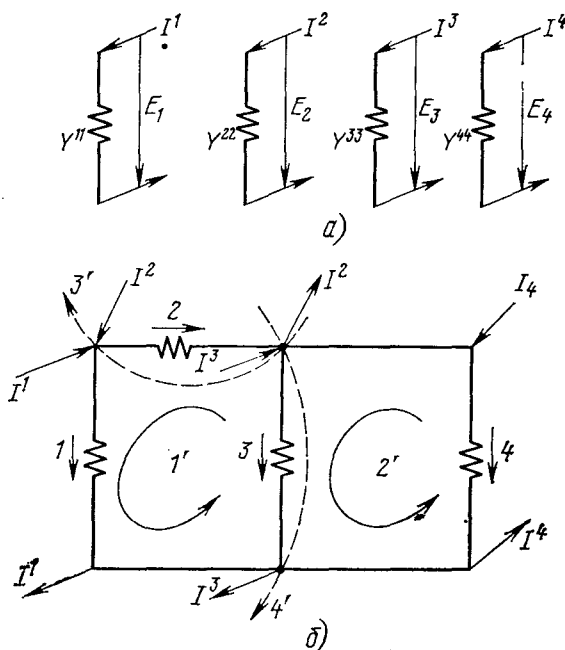


Рис. 2.5. Величины на ветвях электрической цепи при возбуждении источниками тока:

a — простейшая цепь из четырех отдельных ветвей, возбуждаемых источниками тока I^α *б* — те же ветви, соединенные в структуру, выбор замкнутых и разомкнутых путей в этой структуре, величины на отдельных ветвях

разному соединенных ветвей с теми же источниками — это проявления одной абстрактной обобщенной цепи, проекции ее в разные системы координат пространства, заданного совокупностью ветвей.

Все эти конкретные цепи (реализующие одно и то же физическое явление) описываются, следовательно, уравнениями одного типа, представляя собой запись обобщенного закона Ома для соединенной цепи, но каждый символ в уравнениях теперь представляет собой тензор. Значения этих тензоров для разных цепей (систем координат)

различны, но при изменении структуры они преобразуются как геометрические объекты при изменении системы координат.

Для отдельных, не соединенных ветвей необходимо определить все n откликов, чтобы получить их значения для всех ветвей. Другими словами, отклики не связаны между собой никакими соотношениями, они независимы. Геометрически это соответствует тому, что каждая ветвь определяет в абстрактном пространстве ветвей свое измерение, свою ось координат. Сколько ветвей, столько и координат, такова размерность пространства. Каждая ветвь, таким образом, определяет собой независимый путь, по которому распространяется ток, а точнее — поток энергии, характеризуемый рассеиваемой мощностью (энергией в единицу времени). Путь определяет направление потока энергии, которое мы должны учитывать при расчетах. В соединенной цепи направление потоков, их взаимодействие определяются структурой путей цепи. Величина потока при этом задается воздействием и импедансом.

Импеданс характеризует «материальную» часть цепи, ее «подлежащую структуру», которая является носителем потока. Эта подлежащая структура существует независимо от наличия или отсутствия потока энергии. Крон назвал ее «мертвой» сетью в отличие от «живой», возникающей в виде потоков энергии, когда включены источники. Оказывается, что импеданс характеризует метрику этого пространства и определяет метрический тензор цепи.

Чтобы охарактеризовать величину потока энергии только параметрами «живой» сети, мы рассчитываем отклики на ветвях и вычисляем мощность как произведение тока и напряжения, в котором понятие импеданса в явном виде не фигурирует.

Сколько откликов надо определить в соединенной сети, чтобы рассчитать все отклики на ветвях? Столько, сколько ветвей? Нет, во всяком случае далеко не всегда. В предыдущем разделе мы видели, что в цепи из n ветвей имеется j независимых разомкнутых путей и m независимых замкнутых путей, контуров. С контурами связаны токи, с парами узлов, определяющих разомкнутые пути — разности потенциалов, напряжения. При этом $n = m + j$. Эти математические соотношения физически находят выражение в законах, связывающих токи и напряжения со структурой цепи. Это известные законы Кирхгофа, которые утверждают, что:

1. Сумма токов, проходящих через любой узел, равна нулю; или, другими словами, сумма токов, входящих в любой узел, равна сумме токов, выходящих из него.

2. Сумма напряжений по любому замкнутому пути (контур) равна нулю; или: алгебраическая сумма падений напряжений в контуре равна и противоположна по знаку алгебраической сумме источников напряжений, входящих в этот контур.

Эти законы позволяют выразить одни токи и напряжения через другие, следовательно, число независимых токов и напряжений в це-

пи меньше, чем в отдельных ветвях. В силу (2.1) сумма числа независимых токов и напряжений постоянно и равна числу ветвей.

Таким образом, для определения откликов в цепи достаточно определить m токов и (или) j напряжений. Согласно постулату второго обобщения уравнения соединенной цепи должны иметь такой же вид, как для отдельных ветвей:

при контурном возбуждении $e_{\alpha'} = z_{\alpha' \beta'} i_{\beta'}$;

при узловом $I_{\alpha'} = Y_{\alpha' \beta'} E_{\beta'}$.

Для определения контурных величин в соединенной цепи необходимо решить m уравнений, а для определения узловых величин — j уравнений. Каков вид этих уравнений?

Рассмотрим цепь из четырех ветвей, изображенную на рис. 2.4. Пусть сначала по отдельности ветви замкнуты и возбуждаются генераторами напряжения. В такой сети нет узлов, следовательно, нет j -путей, а число m -путей равно числу ветвей, т. е. $m = n = 4$. Величины соединенной цепи обозначим штрихами.

В соединенной цепи три узла A, B, C ($J = 3$), следовательно, j -путей $j' = J - 1 = 2$, тогда $m' = n - j' = 2$. Выберем в цепи m' -пути, j' -пути и направления в них так, как показано на рисунке пунктиром. Выразим токи i^{α} отдельных ветвей через токи $i^{\alpha'}$ в m' -путях

$$\begin{aligned} i^1 &= i^{1'} \\ i^2 &= -i^{1'} \quad -i^{3'} \\ i^3 &= -i^{1'} \quad i^{2'} \quad i^{4'} \\ i^4 &= \quad -i^{2'}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

тогда коэффициенты при новых независимых токах образуют матрицу, которую обозначим $C_{\alpha'}^{\alpha}$ и запишем отдельно

$$C_{\alpha'}^{\alpha} = \begin{array}{c|cccc} & 1' & 2' & 3' & 4' \\ \hline 1 & 1 & & & \\ \hline 2 & -1 & & -1 & \\ \hline 3 & -1 & 1 & & 1 \\ \hline 4 & & -1 & & \end{array} \quad (2.5)$$

Полученная матрица определяет преобразование от системы координат отдельных m -путей к системе координат m' -путей в соединенной структуре. С помощью этой матрицы преобразование токов принимает вид:

$$i^{\alpha} = C_{\alpha'}^{\alpha} i^{\alpha'}. \quad (2.6)$$

Однако (2.5) соответствует случаю, когда все пути замкнутые. В нашем примере пути $3'$ и $4'$ разомкнуты, значит, при контурном

возбуждении они к расчету отношения не имеют, поскольку электрический ток в разомкнутом пути течь не может. Значит, матрица преобразования токов $C_{\alpha'}^{\alpha}$ в данном примере принимает вид

$${}^m C_{\alpha'}^{\alpha} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & 1' & 2' \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline -1 & \\ \hline -1 & 1 \\ \hline & -1 \\ \hline \end{array} \end{array} \end{array} \quad (2.7)$$

Индекс m означает, что матрица относится только к контурам соединенной цепи.

Для получения формулы преобразования напряжений выразим разности потенциалов на ветвях через разности потенциалов на тех же выбранных путях (рис. 2.5):

$$\begin{aligned} E_1 &= E_1' & -E_3' & E_4', \\ E_2 &= & -E_3', \\ E_3 &= & E_4', \\ E_4 &= -E_2' & E_4', \end{aligned} \quad (2.8)$$

тогда коэффициенты при новых независимых напряжениях образуют матрицу

$$A_{\alpha'}^{\alpha} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & 1' & 2' & 3' & 4' \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & & -1 & 1 \\ \hline & & -1 & \\ \hline & & & 1 \\ \hline & -1 & & 1 \\ \hline \end{array} \end{array} \end{array} \quad (2.9)$$

Матрица C имеет простую структурную интерпретацию: каждая строка перечисляет пути, в которые входит данная ветвь с учетом направления, каждый столбец — ветви, составляющие данный путь. Матрица A такой наглядной интерпретации не имеет. Далее мы построим цепь, для которой матрица A будет играть такую же роль, как C для данной цепи:

Столбцы $1'$ и $2'$ матрицы A не имеют отношения к расчету при узловом возбуждении, поскольку разность потенциалов на замкнутом пути равна нулю. Следовательно, матрица преобразования A в данном

примере при возбуждении источниками тока, а не напряжения, принимает вид

$$iA_{\alpha}^{\alpha'} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 3' & 4' \\ \hline 1 & -1 & | & 1 \\ \hline 2 & -1 & | & \\ \hline 3 & & | & 1 \\ \hline 4 & & | & 1 \end{array} \end{array} \quad (2.10)$$

Индекс j означает, что эта матрица относится к разомкнутым путям соединенной цепи. Значения элементов столбцов $1'$ и $2'$ матрицы A были получены в предположении, что эти пути разомкнуты. Формула преобразования напряжений аналогична формуле (2.6) для токов

$$E_{\alpha} = A_{\alpha}^{\alpha'} E_{\alpha'} = iA_{\alpha}^{\alpha'} iE_{\alpha'}. \quad (2.11)$$

Формулы (2.6) и (2.11) определяют закон преобразования токов и напряжений при преобразовании систем координат в пространстве ветвей цепи: исходная система координат была задана путями отдельных ветвей, а полученная система координат задана путями, которые выбраны в цепи в соответствии с рис. 2.4, б.

Матрицы C и A связаны между собой соотношением, которое в математике называется *условием ортогональности*. Это означает, что если в одной из матриц поменять местами строки и столбцы (это называется *транспонирование*), а затем умножить на другую матрицу, то в результате получится единичная матрица (такая же, как при перемножении матриц импедансов и проводимостей)

$$CA_t = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1' & 2' & 3' & 4' \\ \hline 1 & 1 & & \\ \hline 2 & -1 & & -1 \\ \hline 3 & -1 & 1 & 1 \\ \hline 4 & & -1 & \end{array} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1' & 1 & & \\ \hline 2' & & & -1 \\ \hline 3' & -1 & -1 & \\ \hline 4' & 1 & & 1 & 1 \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & & \\ \hline 2 & & 1 & \\ \hline 3 & & & 1 \\ \hline 4 & & & & 1 \end{array} \end{array}, \quad (2.12)$$

где t — индекс, означающий транспонирование.

Для получения формулы преобразования импеданса нужно записать это соотношение в виде символов. Разделим матрицы C и A вертикальной чертой на столбцы, относящиеся к m - и j -путям. Тогда эти матрицы можно записать в виде

$$C = \| {}^m C^j C \|, \quad A = \| {}^m A^j A \|$$

и представить соотношение (2.12) следующим образом:

$$C_t A = \left\| \begin{array}{c} {}^m C_t \\ {}^j C_t \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} {}^m A \\ {}^j A \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} {}^m C_t {}^m A & {}^m C_t {}^j A \\ {}^j C_t {}^m A & {}^j C_t {}^j A \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} {}^m I & 0 \\ 0 & {}^j I \end{array} \right\|,$$

где ${}^m I$ и ${}^j I$ единичные матрицы размера $m \times m$ и $j \times j$ соответственно; 0 означает матрицу из нулей. Отсюда получаем соотношения для матриц преобразования по разным путям в цепи

$${}^m C_t {}^m A = {}^m I, \quad {}^m C_t {}^j A = 0, \quad (2.13)$$

$${}^j C_t {}^m A = 0, \quad {}^j C_t {}^j A = {}^j I.$$

Подставим теперь в уравнения для отдельных ветвей $e_\alpha = z_{\alpha\beta} i^\beta$ выражения для тока и напряжения из соотношений (2.6) и (2.11):

$${}^m A_{\alpha'}^{\alpha'} {}^m e_{\alpha'} = z_{\alpha\beta} {}^m C_{\beta'}^{\beta} {}^m i^{\beta'}. \quad (2.14)$$

Это соотношение записано для m -путей, составляющих линейно-независимую систему координат для определения величин в соединенной цепи при контурном возбуждении. Умножим обе части этого соотношения на $({}^m C_{\alpha'}^{\alpha})_t$:

$$({}^m C_{\alpha'}^{\alpha})_t {}^m A_{\alpha'}^{\alpha'} {}^m e_{\alpha'} = ({}^m C_{\alpha'}^{\alpha})_t z_{\alpha\beta} {}^m C_{\beta'}^{\beta} {}^m i^{\beta'}. \quad (2.15)$$

Первое из соотношений (2.13) показывает, что слева остается единичная матрица, умноженная на вектор напряжения, следовательно, получаем (опустим α и β):

$${}^m e' = ({}^m C_t {}^m C) {}^m i'. \quad (2.16)$$

Согласно постулату второго обобщения, форма уравнений соединенной цепи должна быть такой же, как и простейшей, т. е.

$${}^m e' = {}^m z' {}^m i'. \quad (2.17)$$

Сравнивая (2.16) и (2.17), получим формулу преобразования импеданса:

$${}^m z' = {}^m C_t {}^m C. \quad (2.18)$$

Проводя аналогичные преобразования с заменой m -путей на j -пути, ${}^m C$ на ${}^j A$, z и ${}^m z'$ на Y и ${}^j Y'$ и пользуясь последним из соотношений (2.13),

получим соответствующую формулу преобразования для проводимостей

$${}_jY' = {}_jA {}_jY {}_jA. \quad (2.19)$$

Если $m = n$, то в (2.18) используется квадратная матрица C , а не прямоугольная ее часть, относящаяся к контурам. Если $j = n$, то в (2.19) используется также квадратная матрица A , а не прямоугольная ее часть, относящаяся к j -путям.

Теперь сравним полученные формулы преобразования величин цепи с формулами преобразования тензоров, которые даны в гл. 1. Системы координат в цепи определяются выбором путей в ее структуре. Преобразования координат заключаются в изменении выбора путей или в изменении структуры за счет другого способа соединения элементов. Таким образом, матрицы C_α^α и $A_\alpha^{\alpha'}$, определяющие преобразование координат, аналогичны соответственно матрицам B_α^α и C_α^α , рассмотренным в гл. 1.

Для группы преобразования таких координатных систем ток имеет формулу преобразования (2.6), по содержанию аналогичную формуле преобразования контравариантных компонент вектора (1.13). Напряжение — формулу преобразования (2.11), аналогичную формуле преобразования (1.27) ковариантных компонент вектора. Наконец, формула преобразования импеданса (2.18) аналогична формуле преобразования метрического тензора (1.29), а проводимостей (2.19) — контравариантного метрического тензора (1.30). Это позволяет говорить, что импеданс или проводимость, характеризующие материал цепи, играют роль метрического тензора.

Эти аналогии между формулами преобразования дают основание говорить о тензорном характере преобразования величин при изменении структуры электрических цепей. Следовательно, мы можем рассматривать величины и структуру каждой цепи как «проекции» абстрактной цепи, играющей роль тензора, в разные системы координат, определяемые структурой соединения ветвей. Это позволяет использовать основное преимущество тензорного подхода: по результатам расчета одной наиболее простой цепи (состоящей, скажем, из отдельных ветвей, которую будем называть *простейшей* или *примитивной*), получать с помощью формул преобразования результаты расчета любой цепи, составленной из тех же ветвей, но соединенных любым другим способом. Способ соединения ветвей в структуру рассматривается как преобразование координат, представленное матрицей C_α^α .

Для контурного возбуждения источниками э. д. с. расчет откликов в цепи, т. е. токов в контурах $i^{\alpha'}$, можем получить из соотношения (2.17)

$$m_i' = (m_z')^{-1} m e'. \quad (2.20)$$

Матрицу $^m z'$ получим из (2.18), а $^m e'$ можем получить из (2.11), выражая новые напряжения через старые (используя полную квадратную матрицу A):

$$e_{\alpha'} = (A_{\alpha}^{\alpha'})^{-1} \alpha e_{\alpha}; \quad (2.21)$$

учитывая (2.13), выразим это преобразование через $C_{\alpha}^{\alpha'}$,

$$e_{\alpha'} = (C_{\alpha}^{\alpha'})_t e_{\alpha} = e_{\alpha} C_{\alpha}^{\alpha'}, \quad (2.22)$$

а поскольку при контурном возбуждении рассматриваются переменные только вдоль контуров, то (2.22) принимает вид

$$^m e_{\alpha'} = e_{\alpha} {}^m C_{\alpha}^{\alpha'}. \quad (2.23)$$

Подставив это в (2.20), получаем возможность рассчитать токи в контурах соединенной цепи. Эти токи до некоторой степени условные, введенные нами для расчета величины. Дело в том, что ток в каждой ветви можно измерить непосредственно, включив в эту ветвь амперметр. Контурный ток, в общем случае, так измерить нельзя: может оказаться, что через каждую ветвь проходит несколько контуров и их токи будут накладываться друг на друга (см. сноску на с. 69).

Поэтому необходимо перейти к непосредственным измеряемым величинам — токам в ветвях. Для этого воспользуемся соотношением (2.6), беря только контурную часть матрицы преобразования ${}^m C$. Опуская индексы α и β , обозначая токи в ветвях индексом c (от английского coil — катушка, который Крон использовал в смысле «ветвь»), можно написать

$$i_c^{\alpha} = {}^m C_{\alpha}^{\alpha'}, i^{\alpha'} = {}^m C ({}^m C_t {}^m C)^{-1} {}^m C_t e. \quad (2.24)$$

Рассмотрим процесс расчета откликов при контурном возбуждении на примере цепи, изображенной на рис. 2.4. Результаты расчета потребуются нам в дальнейшем для иллюстрации сохранения мощности при преобразованиях структуры одновременно данной и двойственной цепи.

Крон постулировал, что мощность сохраняется при преобразовании структуры цепей, составленных из одних и тех же ветвей и источников. Но оказывается, и мы в этом сейчас убедимся, что этот постулат выполняется только тогда, когда число контуров в цепи остается постоянным (и, соответственно, узловых пар). Если это не так, то мощность изменится. Чтобы обойти эту трудность (а инвариантность мощности использовалась для получения формулы преобразования напряжения), Крон предложил рассматривать каждую сеть (цепь) как «ортогональную», т. е. состоящую из совокупности замкнутых и разомкнутых путей и преобразуемую с помощью квадратной матрицы C . Число путей тогда равно числу ветвей и остается постоянным при любых соединениях. Проверив это предложение расчетом, мы убедимся, что оно не спасает положения и приводит к противоречию. Тогда мы предложим другой путь решения этого вопроса.

Матрица преобразования цепи, которую мы собираемся рассчитать уже была получена и представлена соотношением (2.7):

$${}^m C_{\alpha'}^{\alpha} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 1' & 2' \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline -1 & \\ \hline -1 & 1 \\ \hline & -1 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Пусть задана матрица импедансов примитивной сети $z_{\alpha\beta}$:

$$z_{\alpha\beta} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & & & \\ \hline & 1 & & \\ \hline & & 1 & \\ \hline & & & 1 \\ \hline \end{array} \end{array} \quad (2.25)$$

и вектор источников ε . д. с. в отдельных ветвях примитивной сети

$$(e_{\alpha})_t = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \end{array} \quad (2.26)$$

Тогда, выполняя последовательно умножения матриц в (2.24), получим

$${}^m e_{\alpha'} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \begin{array}{c} 1' \\ 2' \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & -1 & -1 & \\ \hline & & 1 & -1 \\ \hline \end{array} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 1' & 2' \end{array} \\ \begin{array}{c} 1' \\ 2' \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline -1 & 0 \\ \hline \end{array} \end{array}, \quad (2.27)$$

$${}^m z_{\alpha\beta} {}^m C_{\beta'}^{\beta} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & & & \\ \hline & 1 & & \\ \hline & & 1 & \\ \hline & & & 1 \\ \hline \end{array} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 1' & 2' \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline -1 & \\ \hline -1 & 1 \\ \hline & -1 \\ \hline \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 1' & 2' \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline -1 & \\ \hline -1 & 1 \\ \hline & -1 \\ \hline \end{array} \end{array}, \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned}
m_{z_{\alpha'}\beta'} &= ({}^m C_{\alpha'}^{\alpha})_t (z_{\alpha\beta} {}^m C_{\beta'}^{\beta}) = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1' \\ 2' \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & \\ & & & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} & \begin{matrix} 1' & 2' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & \\ -1 & \\ -1 & 1 \\ & -1 \end{bmatrix} \end{matrix} = \\
&= \begin{matrix} & \begin{matrix} 1' & 2' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1' \\ 2' \end{matrix} & \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \end{matrix}, \tag{2.29}
\end{aligned}$$

$$(m_{z_{\alpha'}\beta'})^{-1} = m_{Y\alpha'\beta'} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1' & 2' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1' \\ 2' \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \end{matrix} 1/5, \tag{2.30}$$

$$m_{i\alpha'} = (m_{z_{\alpha'}\beta'})^{-1} m_{e\alpha'} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1' & 2' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1' \\ 2' \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2/5 & 1/5 \\ 1/5 & 3/5 \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} & \begin{matrix} 1' \\ 2' \end{matrix} \\ \begin{matrix} -1 \\ 0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1' \\ 2' \end{matrix} \\ \begin{matrix} -2/5 \\ -1/5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -2/5 \\ -1/5 \end{bmatrix} \end{matrix}. \tag{2.31}$$

Мощность, рассеиваемая в контурах соединенной сети,

$$mP' = m_{e\alpha'} m_{i\alpha'} = (-1)(-2/5) + 0 \cdot (-1/5) = 2/5. \tag{2.32}$$

Токи в отдельных ветвях соединенной сети получим из (2.24)

$$m_{i_c}^{\alpha} = m C_{\alpha}^{\alpha}, m_{i_c}^{\alpha'} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1' & 2' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & \\ -1 & \\ -1 & 1 \\ & -1 \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} & \begin{matrix} 1' \\ 2' \end{matrix} \\ \begin{matrix} -2/5 \\ -1/5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -2/5 \\ -1/5 \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1' \\ 2' \end{matrix} \\ \begin{matrix} -2/5 \\ 2/5 \\ 1/5 \\ 1/5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -2/5 \\ 2/5 \\ 1/5 \\ 1/5 \end{bmatrix} \end{matrix}. \tag{2.33}$$

Эти токи, в соответствии с направлениями, указанными знаками в (2.33) показаны на рис. 2.6. Как видно, токи удовлетворяют первому закону Кирхгофа.

Разности потенциалов на отдельных ветвях соединенной сети найдем по закону Ома на каждой ветви

$$m e_{\alpha'}^{\alpha} = m i_c^{\alpha} (1/z_{\alpha\alpha}) = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 & 5 & 2 & 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & 5 \end{bmatrix} \end{matrix}. \tag{2.34}$$

Эти разности потенциалов с учетом знаков также показаны на рис. 2.6. Можно видеть, что они удовлетворяют второму закону Кирхгофа $m e_1' = -2/5 - 2/5 - 1/5 = -1$, $m e_2' = 1/5 - 1/5 = 0$.

Мощность, рассеиваемая в отдельных ветвях соединенной сети, естественно такая же, как и в замкнутых m -путях:

$$m P_c' = m e_{\alpha}^c m i_{\alpha}^c = (-2/5) \cdot (-2/5) + 2/5 \cdot 2/5 + 1/5 \cdot 1/5 + 1/5 \cdot 1/5 = 4/25 + 4/25 + 1/25 + 1/25 = 10/25 = 2/5. \quad (2.35)$$

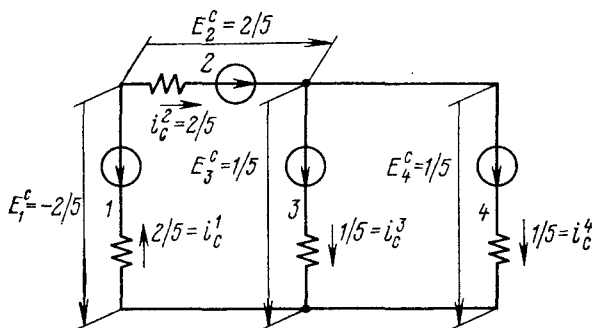


Рис. 2.6. Токи и напряжения на отдельных ветвях, рассчитанные для заданного примера

В примитивной сети рассеиваемая мощность

$$m P = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 4, \quad (2.36)$$

что весьма существенно отличается от мощности, рассеиваемой в соединенной сети. Следуя Крону, мы должны рассматривать нашу сеть как ортогональную, т. е. учесть также наличие j -путей $3'$ и $4'$ на рис. 2.4 и произвести все преобразования с использованием квадратной матрицы $C_{\alpha}^{\alpha'}$, из (2.6). Что же, сделаем эти преобразования. Мы должны получить, что мощность, рассеиваемая примитивной сетью $m P$ и соединенной сетью $m P'$, будет одна и та же. Вектор напряжений в соединенной сети

$$e_{\alpha'} = (C_{\alpha}^{\alpha'})_i e_{\alpha} = e_{\alpha} C_{\alpha}^{\alpha'} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{matrix} 1' & 2' & 3' & 4' \\ \begin{bmatrix} 1 & | & & | \\ -1 & & & -1 \\ -1 & 1 & & 1 \\ & -1 & & \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} 1' & 2' & 3' & 4' \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}. \quad (2.37)$$

Матрица импедансов $z_{\alpha'\beta'}$ из (2.18)

$$z_{\alpha\beta} C_{\beta'}^{\beta} = \begin{array}{c} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & & & \\ \hline & 1 & & \\ \hline & & 1 & \\ \hline & & & 1 \\ \hline \end{array} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \begin{array}{c} 1' \\ 2' \\ 3' \\ 4' \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & & & \\ \hline -1 & & -1 & \\ \hline -1 & 1 & & 1 \\ \hline & -1 & & \\ \hline \end{array} \end{array} =$$

$$= \begin{array}{c} \begin{array}{c} 1' \\ 2' \\ 3' \\ 4' \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & & & \\ \hline -1 & & -1 & \\ \hline -1 & 1 & & 1 \\ \hline & -1 & & \\ \hline \end{array} \end{array}, \quad (2.38)$$

$$z_{\alpha'\beta'} = \begin{array}{c} \begin{array}{c} 1' \\ 2' \\ 3' \\ 4' \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & -1 & -1 & \\ \hline & & 1 & -1 \\ \hline & -1 & & \\ \hline & & 1 & \\ \hline \end{array} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \begin{array}{c} 1' \\ 2' \\ 3' \\ 4' \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & & & \\ \hline -1 & & -1 & \\ \hline -1 & 1 & & 1 \\ \hline & -1 & & \\ \hline \end{array} \end{array} =$$

$$= \begin{array}{c} \begin{array}{c} 1' \\ 2' \\ 3' \\ 4' \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3 & -1 & 1 & -1 \\ \hline -1 & 2 & & 1 \\ \hline 1 & & 1 & \\ \hline -1 & 1 & & 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} m \\ j \end{array} \end{array}, \quad (2.39)$$

$$Y_{\alpha'\beta'} = (z_{\alpha\beta})^{-1} = \begin{array}{c} \begin{array}{c} 1' \\ 2' \\ 3' \\ 4' \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & & -1 & 1 \\ \hline & 1 & & -1 \\ \hline -1 & & 2 & -1 \\ \hline 1 & -1 & -1 & 3 \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} m \\ j \end{array} \end{array}. \quad (2.40)$$

Получим теперь токи в замкнутых и разомкнутых (m и j) путях, выбранных в соединенной сети,

$$i_{\alpha'} = \begin{array}{c} \begin{array}{c} 1' \\ 2' \\ 3' \\ 4' \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & & -1 & 1 \\ \hline & 1 & & -1 \\ \hline 1 & & 2 & -1 \\ \hline 1 & -1 & -1 & 3 \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} m \\ j \end{array} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \begin{array}{c} 1' \\ 2' \\ 3' \\ 4' \end{array} \begin{array}{|c|} \hline -1 \\ \hline \\ \hline -1 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{c} 1' \\ 2' \\ 3' \\ 4' \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline -1 \\ \hline -2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \end{array}. \quad (2.41)$$

Тогда мощность, рассеиваемая в выбранных m и j путях соединенной сети,

$$P' = e_{\alpha'} \cdot i_{\alpha'} = (-1) \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-2) + 1 \cdot 3 = -1 + 0 + 2 + 3 = 4, \quad (2.42)$$

откуда видно, что $P' = P$, т. е. мощности, рассеиваемые в примитивной сети и в соединенной сети, рассматриваемой как ортогональная, равны, что подтверждает предположение об инвариантности мощности при преобразованиях разрывания и соединения в ортогональных сетях.

Вычислим, наконец, токи в отдельных ветвях соединенной сети

$$i_{\alpha'} = C_{\alpha'}^{\alpha} \cdot i_{\alpha} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1' & 2' & 3' & 4' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -1 & & -1 & \\ -1 & 1 & & 1 \\ & -1 & & \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} & \begin{matrix} 1' & 2' & 3' & 4' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1' \\ 2' \\ 3' \\ 4' \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1' & 2' & 3' & 4' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{matrix}. \quad (2.43)$$

Из (2.43) видно, что токи в отдельных ветвях соединенной сети, которые мы можем измерить, равны тем, которые протекают в этих ветвях в примитивной сети. Но это совсем не те токи, которые мы измеряем на самом деле (см. (2.33)) и они не удовлетворяют законам Кирхгофа.

Таким образом, этот пример (можно также привести и другие примеры) показывает, что в ортогональных преобразованиях имеется противоречие, несмотря на то, что они дают всегда правильные численные ответы. Противоречие это состоит в том, что для получения формул преобразования величин в сети мы используем инвариантность мощности. Между тем в ходе решения задач, мы, получая правильные ответы, убеждаемся, что мощность неинвариантна. Если же мы используем ортогональные преобразования с неособенной матрицей $C_{\alpha'}^{\alpha}$, то мощность инварианта, но ответ неправильный — полученные токи в сети не соответствуют действительности.

Попытка разрешить это противоречие приведет нас в последующих разделах этой главы к таким результатам, которые можно использовать для обобщения и обоснования тензорной теории ортогональных сетей Крона.

2.3. ВИДЫ ДВОЙСТВЕННОСТИ В ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ

Читатель замечал, возможно, что многое в мире устроено двойственным образом. Понятия, категории, как правило, появляются парами. Например, простое и сложное, конечное и бесконечное, радость и горе, любовь и ненависть, дискретное и непрерывное. Каждому утверждению можно построить его отрицание.

С другой стороны, эти двойственные противоположности трудно постижимым образом связаны и даже взаимно проникают друг в друга. Например, замкнутый и разомкнутый пути — один можно представить замкнутой окружностью, а другой — бесконечной прямой. Но ведь прямая — это окружность бесконечного радиуса, замкнутая на бесконечности! И, видимо, не зря говорят, что от ненависти до любви — один шаг.

Древнекитайская философия (а может это было еще раньше) обратила внимание на эти обстоятельства, сформулировав понятия о противоположностях «янь» и «инь», которые символизируют черное и белое, добро и зло, тепло и холод и т. д., и представляла мир как равновесие и борьбу этих начал.

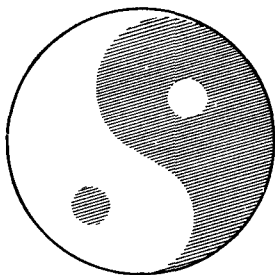


Рис. 2.7. Проявление понятия двойственности (дуальности) в древнекитайской символике

Это нашло отражение и в символике. На рис. 2.7 изображен круг, разделенный на равные части черного и белого цвета. Внутри каждого цвета есть кружок другого цвета. Символ надо понимать так, что хотя противоположности отделены друг от друга резкой границей, но внутри каждой из них сохраняется частичка противоположного.

Нас, естественно, двойственность интересует в связи с тензорными исследованиями, для того, чтобы по одним понятиям, формулам, структурам, методам, автоматически строить двойственные им понятия, формулы, структуры, методы, которые можно сразу использовать на практике без предварительного анализа и рассуждений.

В математике понятие двойственности впервые возникло в проективной геометрии. Наличие двойственности позволяет установить некоторую симметрию в рассуждениях, например, заменяя в любом верном предложении все входящие в него понятия на двойственные им, можно получить верное (двойственное первому) предложение — принцип двойственности в геометрии. В проективной геометрии на плоскости двойственными являются понятия точка и прямая, например: точка, инцидентная прямой, прямая инцидентная точке, и так далее. В проективной геометрии в пространстве двойственны понятия точки и плоскости; понятие прямой само себе двойственно. Это связано с дополнением объекта в пространстве до некоторого в проективном смысле полного. Прямые, плоскости, объемы и так далее (собственные элементы пространства) в проективной геометрии замкнуты на бесконечности так называемыми несобственными элементами — соответственно бесконечно удаленной точкой, бесконечно удаленной прямой, бесконечно удаленной плоскостью и так далее. В основу проективной геометрии кладут полное равноправие собственных и несобственных элементов.

Двойственным отрезку прямой является та часть прямой, которая дополняет отрезок до полной проективной прямой, замкнутой на бесконечности. Аналогично ограниченной окружностью части плоскости двойственна вся внешняя часть плоскости, дополняющая окружность до полной проективной плоскости. И так далее. Стянув окружность в точку, мы получим двойственность точек и плоскостей в проективном пространстве.

Понятие двойственности, определяемое в проективной геометрии, распространяется далеко за ее пределами.

Примером двойственности является линейное программирование. Задача линейного программирования — нахождение заданного целевой функцией максимума *изнутри* выпуклого многогранника, расположенного в n -мерном пространстве. Двойственная задача линейного программирования — нахождение минимума *снаружи* на поверхности многогранника, т. е. в пространстве, дополняющем внутренность многогранника прямой задачи до полного пространства, но в m -мерном пространстве.

Другим примером двойственности может служить алгебраическая топология. Введенная в 1922г. Дж. Александером [Alexander J., 1922] в топологию двойственность в дальнейшем развилась в двойственность между гомологиями и когомологиями. В алгебраической топологии 0-симплексом является точка, 1-симплексом — отрезок прямой без своих границ, 2-симплексом — треугольник, 3-симплексом — тетраэдр (объем) и так далее до p -симплексов n -мерного пространства. Пространства этих симплексов образуют гомологическую последовательность. Ей отвечает двойственная когомологическая последовательность $(n-p)$ симплексов, дополняющих каждый симплекс гомологической последовательности до полного проективного пространства. Например, в трехмерном пространстве $(n-p)$ двойственным 1-симплексу (отрезок прямой) гомологической последовательности оказывается $n-1=3-1=2$ симплекс (плоскость) когомологической последовательности.

Таким образом, двойственность здесь определяется не только размерностью элементов, но и размерностью пространства. Для двух заданных элементов тем самым определена размерность пространства, по которому они могут быть двойственными.

Крон установил двойственность между замкнутыми и разомкнутыми путями в электрической сети, т. е. контурами и парами узлов соответственно. Те и другие образуются ветвями, т. е. «прямыми» (1-симплексами) проективной геометрии. Следовательно, это двойственность между прямыми. Введение такой двойственности оказалось возможным благодаря введению понятия «пара узлов» в противоположность понятию «узел» (двойственной последнему является «плоскость»).

При расчете электрических сетей до этого предпочитали контурный метод узловому, хотя Максвелл в трактате «Электричество и магнетизм» (1873) разработал оба метода, при одном из которых в качестве переменных принимаются токи в замкнутых контурах, а при другом — разности потенциалов, возникающие на парах узлов.

Г. Крон обратил внимание на несимметричность этих подходов в работе Максвелла, что делало неудобным использование узлового метода. Дело в том, что Максвелл принимал потенциал одного из узлов за потенциал отсчета («потенциал» заземления), т. е. за начало координат, и вычислял разности потенциалов между этим узлом и остальными

узлами. Уравнения получались относительно «абсолютных» потенциалов возникающих в каждом узле. Таким образом вводится на одну переменную и одно уравнение больше, чем это фактически необходимо. При этом окончательные уравнения оказываются громоздкими и неудобными.

Введение понятия узловой пары позволяет выбрать в качестве переменной разность потенциалов между любыми двумя точками сети, что, помимо удобства анализа, обеспечивает полную параллельность с методом контурных токов. Благодаря введению двойственных понятий замкнутых и разомкнутых путей в электрическую сеть расчет контурной сети оказывается полностью двойственным расчету узловой сети. Процесс расчета становится симметричным с соответствующей заменой величин при переходе от контурной к узловой сети:

1) воздействующее контурное напряжение e_α заменяется воздействующим узловым током I^α ;

2) контурный ток отклика i^α заменяется напряжениями отклика на парах узлов E_α ;

3) матрица импедансов $z_{\alpha\beta}$ заменяется матрицей адмиттансов (комплексных проводимостей) $Y^{\alpha\beta}$.

В электрических сетях двойственными оказываются следующие величины и понятия:

1) контуры и пары узлов;

2) ветви и узлы;

3) короткое замыкание и размыкание;

4) последовательное и параллельное соединения;

5) напряжения и токи;

6) импеданс и проводимость.

Такой подход, помимо прочего, открывает и простую трактовку преобразований разделения и соединения в рамках проективной геометрии. Как было показано выше (см. стр. 66), размыкание m -пути (контура) приводит к появлению в сети j -пути (пары узлов) и наоборот. В дальнейшем будем называть такие преобразования m — j -преобразованиями.

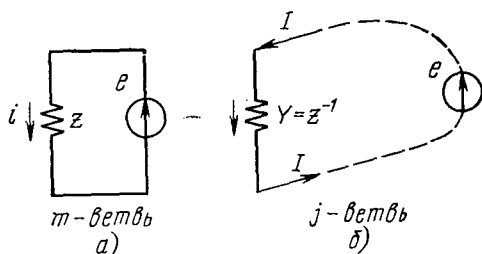
Как импеданс, так и источник э. д. с. в ветви предполагаются сосредоточенными параметрами, следовательно, m -ветвь можно рассматривать как замкнутую линию с двумя точками — точкой импеданса z и точкой источника э. д. с. e .

На проективной плоскости разомкнутая линия может рассматриваться как замкнутая, одна из точек которой удалена на бесконечность. Следовательно, разомкнутая j -ветвь (j -путь) узловой примитивной сети — это m -ветвь, в которой одна из точек удалена на бесконечность. Следовательно, m — j -преобразования на проективной плоскости заключаются в удалении одной из точек ветви электрической цепи на бесконечность (размыкание контура) или, наоборот, в возвращении бесконечно удаленной точки — несобственного элемента — из бесконечности в доступную для обозрения часть проективной плоскости

(замыкание пары узлов). Такие m — j -преобразования представлены на рис. 2.8.

Основная трудность при этом связана с источником воздействия — э. д. с. Действительно, как m -ветвь, так и j -ветвь обладают «точками» импеданса (или обратной ему величины — адмиттанса), но если в m -ветвь включена «точка» генератора m — э. д. с., то в j -ветви нет такой «точки»: воздействие задается током, входящим в j -ветвь с одного узла и выходящим из другого. Сама идея m — j -преобразования подсказывает разрешение этой трудности: при размыкании контура на бесконечность удаляется не любая точка контура, а именно та, в которой расположена точка m — э. д. с.

Рис. 2.8. Преобразование замкнутой ветви с контурным возбуждением — источником напряжения (а) в разомкнутую ветвь с узловым возбуждением — с источником тока (б) и, наоборот, преобразование замкнутых и разомкнутых путей на проективной плоскости



Такой удаленный от глаз наблюдателя источник и будет создавать эффект, который наблюдается в j -ветви: ток из бесконечно удаленного генератора приходит на один узел j -ветви и уходит снова в бесконечность из другого узла.

Контуры и пары узлов в электрической цепи получают простую геометрическую трактовку.

Заменяя m -величины и понятия на двойственные им, получим все формулы преобразования для решения узловой сети. Уравнение поведения узловой сети уже было дано соотношением (2.2). Переменными теперь становятся разности потенциалов E_α , для которых и выводится соответствующая формула преобразования

$$E_\alpha = A_\alpha^{\alpha'} E_{\alpha'}, \quad (2.44)$$

$$I \alpha' = A_\alpha^{\alpha'} I_\alpha, \quad (2.45)$$

$$Y^{\alpha' \beta'} = (A_\alpha^{\alpha'})_t Y^{\alpha \beta} A_\beta^{\beta'}, \quad (2.46)$$

$$I \alpha' = Y^{\alpha' \beta'} E_{\beta'}. \quad (2.47)$$

Выполняя соответствующие подстановки и разрешая уравнение (2.47) относительно переменных $E_{\alpha'}$, получим для j -разностей потенциалов на выбранных парах узлов (j -пути в соединенной сети)

$$E_{\alpha'} = ((A_\alpha^{\alpha'})_t Y^{\alpha \beta} A_\beta^{\beta'})^{-1} (A_\alpha^{\alpha'})_t I_\alpha \quad (2.48)$$

и для разностей потенциалов на отдельных ветвях получим

$$E_{\alpha'}^c = A_{\alpha'}^{\alpha'} (I A_{\alpha'}^{\alpha'})_t Y^{\alpha\beta} A_{\beta}^{\beta'})^{-1} (A_{\beta}^{\beta'})_t I^{\beta}. \quad (2.49)$$

Именно эти величины $E_{\alpha'}^c$ можно измерить в сети непосредственно.

Продолжим теперь решение примера. Рассмотрим ту же сеть, что и на рис. 2.4, но теперь воздействия будут заданы узловыми токами I^{α} , а на ветвях заданы проводимости $Y^{\alpha\beta} = 1/z_{\alpha\beta}$ (рис. 2.5).

Выберем в качестве системы координат те же m - и j -пути. Матрица преобразования от примитивной к соединенной сети $A_{\alpha'}^{\alpha'}$ получена в соотношении (2.9).

Примитивная и соединенная j -сети были показаны на рис. 2.5. Найдем разности потенциалов на отдельных ветвях соединенной j -сети. Для этого ограничимся (поскольку m — э. д. с. отсутствуют) только матрицей преобразования $iA_{\alpha'}^{\alpha'}$, составленной из столбцов 3' и 4' матрицы (2.9); она уже дана в (2.10).

Пусть задана матрица адмитансов примитивной сети

$$Y^{\alpha\beta} = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & & & \\ 2 & & 1 & & \\ 3 & & & 1 & \\ 4 & & & & 1 \end{array} \quad (2.50)$$

и вектор воздействующих j -токов в отдельных ветвях примитивной сети

$$I^{\alpha} = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}. \quad (2.51)$$

Тогда, выполняя последовательно умножения в (2.45) и (2.46), получим $I^{\alpha'}$ и $Y^{\alpha'\beta'}$:

$$iI^{\alpha'} = I^{\alpha} iA_{\alpha'}^{\alpha'} = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & & & & \\ 3 & & & & \\ 4 & & & & \end{array} \begin{array}{c|cc} & 3' & 4' \\ \hline 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & \\ 3 & & 1 \\ 4 & & 1 \end{array} = \begin{array}{c|cc} & 3' & 4' \\ \hline 1 & -2 & 3 \end{array}, \quad (2.52)$$

$$iY^{\alpha\beta} = (iA_{\alpha}^{\alpha'})_i Y^{\alpha\beta j} A_{\beta}^{\beta'} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3' \\ 4' \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & -1 & & \\ 1 & & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{matrix} \begin{matrix} 3' & 4' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & \\ & 1 \\ & 1 \end{bmatrix} = \begin{matrix} \begin{matrix} 3' & 4' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3' \\ 4' \end{matrix} \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad (2.53)$$

$$(Y^{\alpha' \beta'})^{-1} = Z_{\alpha' \beta'} = \begin{matrix} \begin{matrix} 3' & 4' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3' \\ 4' \end{matrix} \end{matrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} 1/5. \quad (2.54)$$

Отсюда получаем разности потенциалов на разомкнутых j -путях 3' и 4'

$$E_{\alpha'} = (Y^{\alpha' \beta'})^{-1} I_{\beta'} = \begin{matrix} \begin{matrix} 3' & 4' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3' \\ 4' \end{matrix} \end{matrix} \begin{bmatrix} 3/5 & 1/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{bmatrix} \cdot \begin{matrix} \begin{matrix} 3' \\ 4' \end{matrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} \begin{matrix} 3' \\ 4' \end{matrix} \begin{bmatrix} -3/5 \\ 4/5 \end{bmatrix} \end{matrix}. \quad (2.55)$$

Мощность рассеиваемая на j -путях.

$$iP' = I_{\alpha'} E_{\alpha'} = (-2) \cdot (-3/5) + 3 \cdot 4/5 = \frac{6}{5} + \frac{12}{5} = \frac{18}{5}. \quad (2.56)$$

Мощность, рассеиваемая в примитивной сети, как нетрудно видеть,

$$iP = I_{\alpha} E_{\alpha} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 4, \quad (2.57)$$

т. е., как и в m -сети, не равна мощности в соединенной j -сети.

Разности потенциалов на отдельных ветвях E_{α}^c , непосредственно поддающиеся измерению,

$$E_{\alpha}^c = iA_{\alpha}^{\alpha'} iE_{\alpha'} = \begin{matrix} \begin{matrix} 3' & 4' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & \\ & 1 \\ & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{matrix} \begin{matrix} 3' \\ 4' \end{matrix} \begin{bmatrix} -3/5 \\ 4/5 \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} \begin{matrix} 1' \\ 2' \\ 3' \\ 4' \end{matrix} \begin{bmatrix} 7/5 \\ 3/5 \\ 4/5 \\ 4/5 \end{bmatrix} \end{matrix}. \quad (2.58)$$

Эти величины показаны на соответствующих ветвях на рис. 2.9. Можно непосредственно проверить, что они удовлетворяют второму закону Кирхгофа.

Проверим, будет ли сохраняться мощность при ортогональных преобразованиях электрической цепи с использованием квадратной матрицы преобразования $A_{\alpha}^{\alpha'}$. Для этого получим $I_{\alpha'}$ и $Y_{\alpha'\beta'}$ с помощью матрицы $A_{\alpha}^{\alpha'}$, заданной соотношением (2.9), и найдем разности потенциалов $E_{\alpha'}$ на m - и j -путях соединенной сети

$$I_{\alpha'} = I_{\alpha} A_{\alpha}^{\alpha'} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1' & 2' & 3' & 4' \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & -1 & 1 \\ \hline 2 & & -1 & \\ \hline 3 & & & 1 \\ \hline 4 & & -1 & 1 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{cc} m & j \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1' & 2' & 3' & 4' \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & -1 & -2 & 3 \\ \hline \end{array} \end{array}, \quad (2.59)$$

$$Y_{\alpha'\beta'} = (A_{\alpha}^{\alpha'})_i Y_{\alpha\beta} A_{\beta}^{\beta'}, \dots$$

$$= \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1' & 1 & & \\ \hline 2' & & & -1 \\ \hline 3' & -1 & -1 & \\ \hline 4' & 1 & & 1 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & & \\ \hline 2 & & 1 & \\ \hline 3 & & & 1 \\ \hline 4 & & & 1 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1' & 2' & 3' & 4' \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & -1 & 1 \\ \hline 2 & & -1 & \\ \hline 3 & & & 1 \\ \hline 4 & & -1 & 1 \\ \hline \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1' & 2' & 3' & 4' \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & -1 & 1 \\ \hline 2 & & 1 & -1 \\ \hline 3 & -1 & 2 & -1 \\ \hline 4 & 1 & -1 & 3 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{cc} m & j \end{array} \end{array}. \quad (2.60)$$

Эта матрица уже была получена в (2.40) как обратная к $z_{\alpha'\beta'}$, поэтому обратная к $Y_{\alpha'\beta'}$ и есть $z_{\alpha'\beta'}$, полученная в (2.39)

$$z_{\alpha'\beta'} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1' & 2' & 3' & 4' \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & -1 & 1 \\ \hline 2 & -1 & 2 & 1 \\ \hline 3 & 1 & & 1 \\ \hline 4 & -1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} = (Y_{\alpha'\beta'})^{-1}. \quad (2.61)$$

Разности потенциалов $E_{\alpha'}$ на выбранных m - и j -путях в соединенной сети

$$E_{\alpha'} = (Y^{\alpha' \beta'})^{-1} I^{\beta'} \quad (2.62)$$

		1'	2'	3'	4'				
1'	·	3	-1	1	-1	1'	1	1'	-1
2'		-1	2		1	2'	-1	2'	0
3'		1		1		3'	-2	3'	-1
4'		-1	1		1	4'	3	4'	1

Мощность, рассеиваемая в выбранных m - и j -путях соединенной сети,

$$P' = I^{\alpha'} E_{\alpha'} = 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 + (-2) \cdot (-1) + 3 \cdot 1 = 4, \quad (2.63)$$

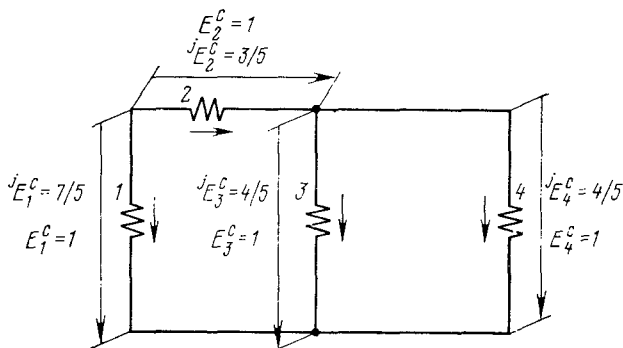


Рис. 2.9. Распределение токов и напряжений на ветвях соединенной цепи при узловом возбуждении источниками тока

равна мощности, рассеиваемой в примитивной сети. Получим разности потенциалов на отдельных ветвях соединенной сети поддающиеся непосредственному измерению

$$E_{\alpha'}^c = A_{\alpha'}^{\alpha'} E_{\alpha'} \quad (2.64)$$

		1'	2'	3'	4'				
1	·	1		-1	1	1	-1	1	1
2				-1		2		2	1
3					1	3	-1	3	1
4		-1			1	4	1	4	1

Эти разности потенциалов такие же, как и на ветвях примитивной сети, но они не соответствуют тем разностям потенциалов, которые действительно возникают на ветвях соединенной сети и не удовлетворяют второму закону Кирхгофа (см. рис. 2.9).

Таким образом, и при решении узловых j -сетей, двойственных m -сетям контуров, получаем противоречие: либо правильные численные результаты с помощью матрицы $iA_{\alpha}^{\alpha'}$, но при этом мощность неинвариантна, либо используем полную матрицу $A_{\alpha}^{\alpha'}$ и при этом мощность инвариантна, но численные результаты неправильны.

Разъяснение этого противоречия отложим до следующего параграфа. Здесь же мы получили метод решения электрических j -сетей с узловым возбуждением, двойственных m -сетям с контурным возбуждением. Эта двойственность оказалась возможной потому, что электрическая сеть рассматривается как совокупность потоков энергии.

Многие другие, неэлектрические системы также можно представить и рассматривать как совокупность потоков некоторых величин (не обязательно потоков энергии). Это и дает возможность устанавливать некоторое соответствие между сложными системами различной природы и электрическими сетями.

Все возможные пути потоков могут быть либо замкнутыми, либо разомкнутыми. В этом смысле можно говорить о «полноте» понятия потоков и взаимной дополнительности, двойственности замкнутых и разомкнутых путей.

2.4. КУДА ИСЧЕЗАЕТ МОЩНОСТЬ

*Один опыт я ставлю выше,
чем тысячу мнений,
рожденных только воображением.*

М. В. Ломоносов

Итак, мы получили основные формулы тензорного анализа сетей, рассмотрели пример того, как «работают» тензоры в электротехнике. Теперь, представив какую-нибудь сложную систему моделью в виде эквивалентной электрической цепи, мы можем исследовать, рассчитывать эту систему так, как если бы имели дело с электрической цепью. Однако, прежде чем к этому перейти, нам осталось разобратся с мощностью.

Так ли это важно? Крону это было важно, поскольку он получал формулу преобразования напряжения из инвариантности мощности. Для этого предполагалось, что в сети α и β мощности P и P' равны; тогда

$$P = e_{\alpha} i^{\alpha} = e_{\alpha'} i^{\alpha'} = P'. \quad (2.65)$$

Подставляя сюда формулу преобразования тока из (2.6), получим

$$e_{\alpha} C_{\alpha'}^{\alpha} i^{\alpha'} = e_{\alpha'} i^{\alpha'}, \quad (2.66)$$

а затем, деля обе части уравнения на $i^{\alpha'}$,

$$e_{\alpha'} = (C_{\alpha'}^{\alpha})_t e_{\alpha}. \quad (2.67)$$

Но мы уже получили такую формулу из анализа структуры электрической цепи с помощью второго закона Кирхгофа, и сохранение мощности нам не потребовалось. Однако нельзя совсем обойти эту величину своим вниманием. Вспомним гл. I. Произведение ковариантных и контравариантных компонент вектора дает инвариант — квадрат его длины! В данном случае контравариантен ток, ковариантно напряжение, а их произведения, равные рассеиваемой мощности, ни для контурных, ни для узловых цепей, как мы видели, инвариантом структурных преобразований не являются. Это ставит под сомнение тензорный характер полученных формул, а следовательно, и возможность их применения для других, неэлектрических систем.

Не следует забывать, кроме того, что рассеиваемая мощность — это численная характеристика вектора потока электрической энергии, распространяющейся через структуру цепи. Отсутствие сохранения мощности говорит о том, что при одних и тех же источниках различные соединения ветвей меняют величину потока энергии в структуре. Почему так должно происходить, также не совсем понятно. Таким образом, вопрос инвариантности, сохранения мощности имеет принципиальное значение.

В конце концов, пусть мощность не сохраняется, но разве не должна существовать какая-нибудь закономерность в ее распределении при изменении структуры цепей?

Сравнение формул расчета контурных и узловых цепей не дает указаний на существование такой закономерности. Эти формулы представляют собой обобщение законов Ома и Кирхгофа. Достаточно ли их для описания закономерностей прохождения потока энергии через структуру? Не имея возможности получить такую закономерность аналитически, мы вынуждены обратиться к опыту, в надежде обнаружить требуемую закономерность экспериментальным путем. Для этого надо произвести ряд расчетов цепей при разных структурах, способах соединения ветвей и значениях источников тока и напряжения, импедансов и сравнить результаты расчета.

Один такой пример мы рассмотрели в предыдущих параграфах. Заметим, что, следуя принципам тензорной методологии, мы выбрали один из простейших возможных примеров. Источники воздействия, импедансы и проводимости ветвей выбраны единичными, взаимные индуктивности между ветвями равны нулю. Четыре ветви соединены так, чтобы образовались два контура и две пары узлов. Благодаря этому матрицы импедансов и проводимостей соединенной цепи еще остаются матрицами, а не просто числами, но их порядок минимален: по две строки и два столбца, что позволяет все действия с ними, вплоть до обращения, производить на бумаге или даже в уме.

Остается сравнить результаты расчета. Сделав это, мы обнаружим несколько неожиданный экспериментальный факт: мощности в соединенной контурной и узловой цепях в сумме равны мощностям в про-

стейшей контурной или узловой цепях из отдельных ветвей! Действительно, суммируя (2.32) и (2.56), получим

$$mP' + iP' = 2/5 + 18/5 = 4 = iP = mP. \quad (2.68)$$

Можно было бы думать, что это случайность, однако другие расчеты подтверждают существование этой закономерности. По уточнении ее характера для различных указанных выше параметров цепи можно записать ее следующей общей формулой:

$$mP' + iP' = 1/2 (mP + iP), \text{ при } mP = iP, \quad (2.69)$$

которая словами выражается так:

При любых преобразованиях разделения и соединения структуры электрических цепей суммарная мощность, рассеиваемая в контурной и узловой цепи соединенной цепи при контурном и узловом возбуждении, остается постоянной, равной половине суммарной мощности, рассеиваемой в исходной цепи из отдельных ветвей с тем же контурным и узловым возбуждением.

Итак, при соединении отдельных ветвей в структуре полученной цепи остается ровно половина исходного потока энергии, характеризующегося рассеиваемой мощностью. Но куда девалась вторая половина? Почему соединение ветвей — внешне столь безобидная процедура — «похищает» у нас целую половину потока энергии?

Попробуем в этом разобраться. Найденную закономерность можно наглядно представить круговой диаграммой, которая изображена на рис. 2.10. Площадь круга соответствует полной рассеиваемой в цепи мощности при контурном и узловом возбуждении. Мощности, рассеиваемые при возбуждении каждого типа, равны и разделены наклонным диаметром. Круг разделен горизонталью, проходящей через центр. Верхняя половина соответствует мощности в рассмотренной нами цепи. При изменении структуры контурная и узловая мощности меняются, их перераспределение отображается изменением положения, как бы вращением наклонного диаметра в соответствии с соотношением (2.69), но сумма, представленная верхней половиной круга, постоянна.

Для наглядности эту диаграмму можно рассматривать как двухцветный детский мячик, погруженный в некую «жидкость» равно наполовину. Пусть контурная половинка будет красного цвета, а узловая — синего. При изменении структуры цепи мячик, представляющий мощность, вращается, меняются пропорции синего и красного над поверхностью, но суммарная площадь их остается постоянной. Если цепь чисто контурная — мы видим только красную половинку, если цепь чисто узловая — только синюю.

Мячик хорошо передает существо обнаруженной закономерности, однако эта диаграмма заставляет задуматься, чему соответствует нижняя половина мячика. В нижней половине распределение мощности между красной и синей частями является обратным распределению в

верхней половине. Это наводит на мысль, что вместе с данной цепью должна рассматриваться другая цепь, обладающая двойственной структурой, в которой при таком же контурном и узловом возбуждении распределение мощностей будет обратным.

Чтобы разобраться в этом, рассмотрим процесс преобразования отдельных ветвей в соединенную цепь, который можно представить так. Первоначально имеются отдельные ветви с источниками возбуждения. Рассмотрим два случая. В одном из них все ветви замкнуты и

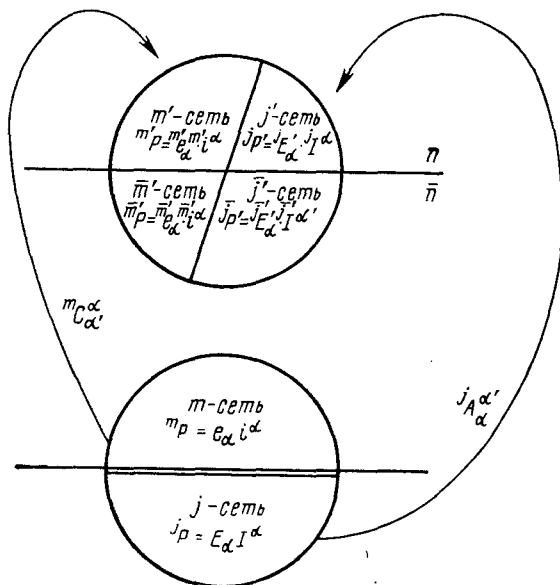


Рис. 2.10. Круговая диаграмма распределения рассеиваемой мощности в структуре электрической цепи — диаграмма «детского мячика»: a — в цепи из отдельных ветвей при контурном и узловом возбуждении; b — в соединенной сети при таком же возбуждении источниками тока и напряжения. Верхняя половина круга — в цепи с данной структурой, нижняя половина — в цепи с двойственной структурой

возбуждаются источниками напряжения. В каждой ветви возникающий контурный ток проходит по своему пути, не пересекаясь с другими. Суммарная рассеиваемая мощность m^P представлена верхней половиной нижнего круга.

В другом случае все ветви разомкнуты и возбуждаются источниками тока. На узлах каждой ветви возникают разности потенциалов; соответствующие им разомкнутые пути не пересекаются друг с другом. Суммарная рассеиваемая мощность i^P представлена нижней половиной нижнего круга. Если мы выбрали значения источников тока и на-

пряжения так, чтобы суммарные мощности mP и iP были равны, то вместе соответствующие им площади составят полный круг. Образно можно сказать, что красно-синий, или, иначе, контурно-узловой, мячик лежит на «суше».

Теперь соединим ветви в некоторую цепь, структура которой содержит как замкнутые, так и разомкнутые пути. При этом в общем случае замкнутых контуров разомкнутых путей становится меньше, но их сумма в соответствии с (2.1) постоянна и равна числу ветвей независимо от способа их соединения. Мы уже отмечали (см. стр. 69), что при таком рассуждении число независимых переменных при переходе к соединенной структуре сокращается вдвое: n независимых контурных и n независимых узловых переменных преобразуются в $m + j = n$ независимых контурных и узловых переменных соединенной цепи. Отсюда и напрашивается необходимость рассматривать одновременно второй набор переменных, реализуемый другой, двойственной к данной, цепью, в котором из соображений симметрии должно быть j независимых контурных переменных и m независимых узловых переменных.

Теперь, поскольку независимых замкнутых путей стало меньше, то не все токи от источников уже могут найти себе собственные, независимые пути. Некоторым токам приходится протекать вместе по одному пути, и тогда они складываются или вычитаются в зависимости от направления, что, в конечном итоге, приводит к уменьшению рассеиваемой мощности mP' . На рисунке это преобразование представлено левой стрелкой от нижнего к верхнему кругу. Из полукруга мы получаем сектор.

Аналогично при узловом возбуждении. Поскольку независимых разомкнутых путей стало меньше, не все возникающие напряжения могут найти себе отдельную, независимую от других пару узлов. Некоторые напряжения «сталкиваются» на одном разомкнутом пути и в зависимости от ориентации складываются или вычитаются, что в конечном итоге приводит к уменьшению рассеиваемой мощности iP' . На диаграмме это преобразование представлено правой стрелкой от нижнего к верхнему кругу. Из полукруга мы получаем другой сектор.

Сумма мощностей mP' и iP' , которым соответствуют эти сектора, согласно (2.69), равна половине суммы мощностей mP и iP и остается постоянной, независимо от соединения ветвей, хотя значения как mP' , так и iP' при этом могут меняться от 0 до mP (или iP). То есть оба полученных сектора меняются по величине, но в совокупности всегда составляют полукруг.

Образно можно сказать, что соединение отдельных ветвей в структуру цепи приводит к «погружению» мячика в жидкость, причем на поверхности остается только половина его. Пересоединение ветвей, изменяющее структуру, приводит к перераспределению мощностей, чему соответствует вращение мячика в этой жидкости.

Контурное преобразование выполняется с помощью матрицы ${}^m C_{\alpha}^{\alpha'}$, а узловое — с помощью ${}^i A_{\alpha}^{\alpha'}$.

Что соответствует нижней, «подводной» части мячика? По-видимому, должна существовать другая, двойственная к данной цепь, в которой распределение мощностей при контурном и узловом возбуждении меняется местами. Под такой цепью с двойственной структурой будем понимать цепь, состоящую из тех же n ветвей, но соединенную в структуру с j контурами и m парами узлов. Все контурные и узловые понятия для такой цепи меняются местами.

Данную цепь обозначим α , а двойственную — $\bar{\alpha}$. Все величины, относящиеся к двойственной цепи, обозначим чертой над соответствующей буквой. Тогда соотношения между параметрами и величинами в этих двух цепях можно записать следующим образом: $\bar{m} = j$, $j = m$, $\bar{n} = n$, $m + \bar{m} = j + j = m + j = \bar{m} + \bar{j} = \bar{n} = n$.

Чтобы построить структуру цепи $\bar{\alpha}$, надо использовать в качестве матрицы преобразования $\bar{C}_{\alpha}^{\alpha'} = A_{\alpha}^{\alpha'}$ вместо $C_{\alpha}^{\alpha'}$ и соответственно, $\bar{A}_{\alpha}^{\alpha'} = C_{\alpha}^{\alpha'}$. То есть, строки и столбцы матрицы A получают такую же наглядную структурную интерпретацию, которую мы давали для матрицы C , но уже для двойственной цепи $\bar{\alpha}$, а именно (для сравнения см. стр. 76):

1) элементы столбцов матрицы A перечисляют ветви, взятые с их знаками ориентации, из которых состоит данный путь в двойственной $\bar{\alpha}$ -цепи;

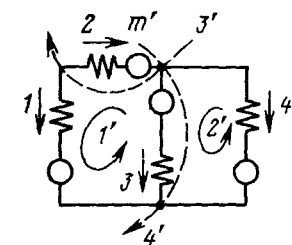
2) строки матрицы A перечисляют те пути в двойственной $\bar{\alpha}$ -цепи, в которые входит данная ветвь в соответствии с ее ориентацией в этих путях.

Таким образом, мы получаем еще один тип двойственности в электрических цепях, связанный со структурой цепи.

Линейно независимые замкнутые и разомкнутые пути в $\bar{\alpha}$ -цепи образуют базис. Переход к этому базису от системы координат, связанной с отдельными ветвями, осуществляется с помощью матрицы преобразования A , которая ортогональна матрице C . Это дает нам основание рассматривать этот базис как взаимный по отношению к базису, определяемому путями в структуре данной цепи. Формально базис в двойственной цепи удовлетворяет требованиям к взаимному базису, которые мы рассматривали в первой главе. Что же соответствует связанным с этим понятием ковариантным и контравариантным компонентам вектора во взаимных системах координат, которые мы представили на рис. 1.8

Пример взаимно двойственных цепей, соответствующих им матриц преобразования изображен на рис. 2.11. Для большей наглядности цепи с контурным и узловым возбуждением показаны отдельно друг от друга. Как видим, ветви в этих цепях одни и те же, но соединены

они по-разному. Размыкание контура в одной цепи приводит к замыканию контуром узловой пары в другой цепи. В сумме число контуров и пар узлов остается постоянным при таких структурных преобразованиях двойственных цепей. Таким образом, остается постоянным и число переменных каждого типа, причем оно равно числу переменных в контурных и узловых простейших цепях.

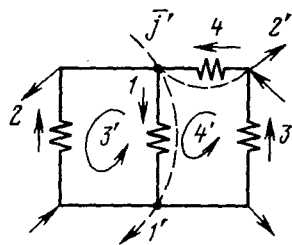
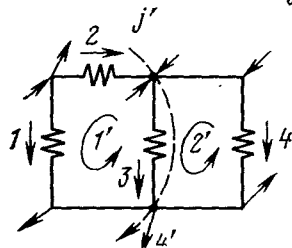


$$C_{\alpha'}^{\alpha} = \begin{array}{c|cccc} & 1' & 2' & 3' & 4' \\ \hline 1 & 1 & & & \\ 2 & -1 & & -1 & \\ 3 & -1 & 1 & & 1 \\ 4 & & -1 & & \end{array} = \bar{A}_{\alpha'}^{\alpha'}$$

α -сети

$$n=4, m=2, j=2$$

$$A_{\alpha'}^{\alpha'} = \begin{array}{c|cccc} & 1' & 2' & 3' & 4' \\ \hline 1 & 1 & & -1 & 1 \\ 2 & & & -1 & \\ 3 & & & & 1 \\ 4 & & -1 & & 1 \end{array} = \bar{C}_{\alpha'}^{\alpha'}$$



$\bar{\alpha}$ -сети

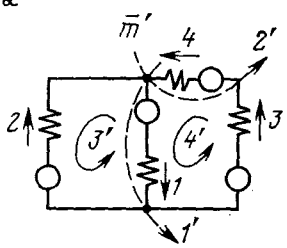


Рис. 2.11. Пример цепей из четырех ветвей с двойственными в смысле матриц преобразования структурами, а также соответствующие им матрицы преобразования

Как уже говорилось, все величины в двойственной цепи взаимно меняются. Воздействие в контурной цепи, источники напряжения численно равны источникам тока в α -цепи. Наоборот, источники тока в узловой $\bar{\alpha}$ -цепи численно равны источникам напряжения в контурной α -цепи. Соответственно меняются места матрицы импедансов и проводимостей и т. д. В силу этого распределение мощности в $\bar{\alpha}$ -сети соответствует нижней части верхнего круга на диаграмме, или «под-

водной» части мячика. Эти соотношения можно записать следующими формулами:

$$mP = mP' + \bar{m}P' = mP' + iP' = iP, \quad (2.70)$$

$$mP = iP' + \bar{i}P' = mP' + \bar{i}P' = iP. \quad (2.71)$$

Исходя из существования двойственной цепи, можно теперь иначе сформулировать найденную закономерность сохранения мощности при преобразовании структуры электрической цепи:

При любых способах соединения ветвей в электрической цепи суммарная мощность, рассеиваемая в цепях с данной и двойственной структурой, есть величина постоянная.

Если вспомнить, что мощность—характеристика потока электрической энергии в цепи, то эту закономерность можно записать еще так. При любых преобразованиях структуры цепи, составленной из одних и тех же ветвей, суммарный поток энергии в цепях с данной и двойственной структурой остается величиной постоянной. Найденную закономерность можно записать следующей общей формулой:

$$mP + iP = mP' + iP' + \bar{m}P' + \bar{i}P'. \quad (2.72)$$

Важной особенностью новой формулировки является то, что исчезает зависимость от типа возбуждения цепи, а также необходимость связывать между собой мощности, рассеиваемые в цепи при контурном и узловом возбуждении. Действительно, если имеется только контурное возбуждение, то сохранение мощности означает, что мощность, рассеиваемая источниками напряжения в данной и двойственной цепях, остается постоянной независимо от соединения ветвей, а также от значения и наличия источников тока. Аналогично, если имеется только узловое возбуждение, то мощность, рассеиваемая источниками тока в данной и двойственной цепях, постоянна независимо от способа соединения ветвей и от наличия и значения источников напряжения.

Сопоставим формулы преобразования величин в данной и двойственной цепях при разных типах возбуждения.

К о н т у р н о е в о з б у ж д е н и е .

$$m\text{-сеть} \quad \bar{m}\text{-сеть} \quad (\bar{m}C_{\alpha}^{\alpha}, \bar{i}A_{\alpha}^{\alpha'})$$

1. Формулы преобразования тока

$$i^{\alpha} = mC_{\alpha}^{\alpha}, i^{\alpha'} \quad \bar{i}^{\alpha} = \bar{m}C_{\alpha}^{\alpha}, \bar{i}^{\alpha'}. \quad (2.73)$$

2. Формулы преобразования напряжения

$$m e_{\alpha'} = (mC_{\alpha}^{\alpha})_i e_{\alpha} \quad \bar{m} e_{\alpha'} = e_{\alpha}^{\bar{m}} C_{\alpha}^{\alpha}. \quad (2.74)$$

3. Формулы преобразования импеданса

$$m z_{\alpha', \beta'} = z_{\alpha\beta} mC_{\alpha}^{\alpha}, mC_{\beta}^{\beta}, \quad \bar{m} z_{\alpha', \beta'} = z_{\alpha\beta} \bar{m}C_{\alpha}^{\alpha}, \bar{m}C_{\beta}^{\beta}. \quad (2.75)$$

4. Формулы расчета рассеиваемой мощности

$$m_{P'} = m_{i\alpha'} m_{e_{\alpha'}}, \quad \bar{m}_{P'} = \bar{m}_{i\alpha'} \bar{m}_{e_{\alpha'}}. \quad (2.76)$$

Узловое возбуждение

$$j\text{-сеть} \quad \bar{j}\text{-сеть} (\bar{j} \bar{A}_{\alpha'}^{\alpha} = {}^m C_{\alpha}^{\alpha}).$$

1. Формулы преобразования напряжения

$$E_{\alpha} = i A_{\alpha}^{\alpha'} i E_{\alpha'}, \quad \bar{E}_{\alpha} = \bar{i} A_{\alpha}^{\alpha'} \bar{i} E_{\alpha'}. \quad (2.77)$$

2. Формулы преобразования тока

$$i I_{\alpha'} = (i A_{\alpha}^{\alpha'}) I^{\alpha} \quad \bar{i} I_{\alpha'} = I^{\alpha} \bar{i} A_{\alpha}^{\alpha'}. \quad (2.78)$$

3. Формулы преобразования проводимости

$$i Y^{\alpha' \beta'} = Y^{\alpha \beta} i A_{\alpha}^{\alpha'} i A_{\alpha'}^{\beta} \quad \bar{i} Y^{\alpha' \beta'} = Y^{\alpha \beta} \bar{i} A_{\alpha}^{\alpha'} \bar{i} A_{\alpha'}^{\beta}. \quad (2.79)$$

4. Формулы расчета рассеиваемой мощности

$$i P' = i E_{\alpha} i I_{\alpha'} \quad \bar{i} P' = \bar{i} E_{\alpha} \bar{i} I_{\alpha'}. \quad (2.80)$$

Эти формулы, обобщающие формулы тензорного анализа сетей Г. Крона, симметричны относительно трех типов двойственности: 1) токов и напряжений; 2) замкнутых и разомкнутых путей; 3) структур, определяемых матрицами преобразования C и A .

Такой обобщенный тензорный анализ сетей находит вполне конкретные аналогии в традиционном тензорном анализе математики. Это обобщение связано с понятием взаимного базиса. В гл. 1 мы видели, что проектирование вектора в системы координат, определяемые прямым и взаимным базисом, дает компоненты четырех типов. Эти типы компонент изображены на рис. 1.8. В данной системе координат прямой базис определяет ковариантные и контравариантные компоненты, подобно тому, как заданные источники на ветвях определяют контравариантный ток и ковариантное напряжение в структуре данной цепи. В системе координат, связанной со взаимным базисом, тот же вектор также имеет ковариантные и контравариантные компоненты, подобно тому, как те же источники определяют ток и напряжение в структуре двойственной цепи. Причем эти компоненты вектора потока энергии в системе координат-путей преобразуются в соответствии с формулами (2.73)—(2.80) как ковариантный ток и контравариантное напряжение по отношению к системе координат исходной данной цепи.

В этих аналогиях тензорного анализа геометрии и тензорного анализа цепей имеется и обратная связь, которая заключается в том, что обнаруженная закономерность, выражаемая формулами (2.70) и (2.72), дает наглядные физические интерпретации для ковариантных и контравариантных проекций вектора в системе координат взаимного базиса.

В заключение этой главы рассмотрим пример расчета цепи из семи ветвей для различных способов их соединения в структуру, с тем, что-

бы наглядно показать распределение мощности в цепи и «вращение» мячика при изменении ее структуры.

Возьмем для расчета случай цепи из семи ветвей, соединения которых, образующие структуру, показаны на рис. 2.3. Для одних и тех же ветвей эти структуры содержат от одного до семи контуров. Чтобы для каждого случая не выписывать матрицу преобразования, рассмотрим такие цепи, которые описываются одинаковым набором путей, соответственно одной и той же матрицей преобразования. Первая цепь представляет собой дерево и не содержит контуров, во второй цепи один из путей, а именно 1', замкнут в контур, матрица S состоит из одного столбца; для третьей цепи замыкаем еще один путь 2' в контур и матрица S содержит теперь два столбца, и т. д., пока мы не замкнем все разомкнутые пути в контуры. Квадратная матрица преобразования для такой чисто контурной цепи, соответствующая выбранным на рисунке путям, имеет следующий вид:

$$C_{\alpha'}^{\alpha} = \begin{array}{c|ccccccc} & 1' & 2' & 3' & 4' & 5' & 6' & 7' \\ \hline 1 & 1 & & & & & 1 & \\ 2 & -1 & & & -1 & -1 & & \\ 3 & 1 & -1 & & & & & \\ 4 & & -1 & & & & & \\ 5 & & -1 & 1 & & & 1 & \\ 6 & & & -1 & & & & \\ 7 & & & -1 & & & & 1 \end{array} \quad (2.81)$$

Вообще говоря, пути в цепи, как и способы соединения ветвей, можно выбирать произвольно: найденная закономерность распределения мощности от этого не зависит.

Собственные импедансы ветвей выберем единичными, взаимные индуктивности — нулевыми. Матрица импедансов простейшей цепи из отдельных ветвей тогда примет вид

$$z_{\alpha\beta} = \begin{array}{c|ccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline 1 & 1 & & & & & & \\ 2 & & 1 & & & & & \\ 3 & & & 1 & & & & \\ 4 & & & & 1 & & & \\ 5 & & & & & 1 & & \\ 6 & & & & & & 1 & \\ 7 & & & & & & & 1 \end{array} \quad (2.82)$$

Для выбранных видов цепей матрица импедансов будет иметь от нуля до семи строк и столбцов. В каждом случае она рассчитывается

по формуле (2.18): конкретный вид этих матриц мы здесь не приводим. Матрица проводимостей отдельных ветвей также соответственно будет единичная.

Зададим источники напряжения в ветвях следующим вектором:

$$e_{\alpha} = \begin{array}{c|ccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline & 0 & 0 & 10 & 1 & 0 & 1 & 5 \end{array} \quad (2.84)$$

Таким образом, источники напряжения есть не во всех ветвях. Поскольку матрица импедансов единична, то можно задать источники тока такими же, как источники напряжения

$$I_{\alpha} = \begin{array}{c|ccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline & 0 & 0 & 10 & 1 & 0 & 1 & 5 \end{array}.$$

При этом мощность, рассеиваемая в простейшей цепи с контурным и узловым возбуждением, будет одинакова. С учетом формулы (2.73) это обстоятельство не является существенным для выполнения закономерности сохранения мощности, поскольку ее выполнение не зависит от соотношения между источниками тока и напряжения. Однако это позволит нам построить более наглядную и симметричную диаграмму распределения мощностей — «мячик».

Расчет величин токов и напряжений на ветвях наших цепей производится по формулам тензорного анализа сетей (2.74)—(2.81). Мы приведем только полученные по этим формулам результаты расчета рассеиваемых мощностей в цепях с данной и двойственной структурой при контурном и узловом возбуждении. Эти расчеты оказываются трудно выполнимыми на бумаге. Для их выполнения приходится призывать на помощь вычислительную технику. Мы видели, что расчет даже простой цепи требует довольно длительных, хотя и не сложных вычислений. С ростом числа ветвей объем вычислений растет пропорционально кубической степени. При малом числе ветвей трудно наглядно продемонстрировать процесс «вращения» мячика с изменением структуры цепи. Чтобы не работать самому в качестве арифмометра, автор написал программу для ЭВМ, которая реализует все рассмотренные в этой главе формулы. В результате получается расчет всех токов, напряжений и мощностей на ветвях при любом соединении ветвей и для любого типа возбуждения. Число ветвей в цепи ограничивается при этом только объемом памяти используемой ЭВМ. Программа проверяет также, сохраняется ли мощность при преобразованиях структуры цепей и вычисляет угол наклона мячика на круговой диаграмме. Значения мощностей для наших цепей сведены в табл. 2.1. В ней указано число ветвей в цепи, число контуров для данного типа соединения, мощность, рассеиваемая в простейшей (чисто контурной или узловой), соединенной контурной и соединенной узловой цепях, а также угол наклона мячика, пропорциональный этим значениям.

Таблица 2.1

№ п/п	Число ветвей	Число контуров	Мощности в цепях			Угол наклона мячика, град
			простейшей	контурной	узловой	
1	7 а), б)	0	127,0	0	127,0	0
2	7 в)	1	127,0	33,33	93,67	47,24
3	7 г)	2	127,0	55,38	71,62	78,49
4	7 д)	3	127,0	85,38	41,62	121,0
5	7 е)	4	127,0	91,54	35,46	129,7
6	7 ж)	5	127,0	117,40	9,60	166,4
7	7 з)	6	127,0	119,0	8,00	168,7
8	7 к), и)	7	127,0	127,0	0,0	180,0

Для рассеиваемой мощности в двойственной контурной цепи следует брать из столбцов таблицы для узловой цепи и наоборот, для двойственной узловой цепи значения рассеиваемой мощности — из столбца для контурной цепи.

На рис. 2.12 изображена круговая диаграмма рассеивания мощности, построенная по данным этой таблицы. Как видим, при увеличении числа контуров в цепи рассеиваемая контурная мощность возра-

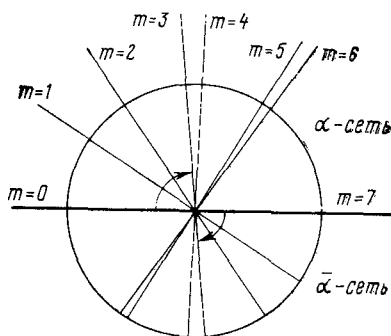


Рис. 2.12. Диаграмма распределений мощностей в цепи из семи ветвей, структура различных соединений которых представлена на рис. 2.3.

С ростом числа контуров «мячик» вращается в направлении, указанном стрелкой

стает. Разработанные программы позволяют изучать распределение мощности в электрических цепях (и характеризуемого мощностью потока энергии) в зависимости от структуры и параметров цепи.

Для нас в данном случае важно другое. Все проведенные расчеты подтверждают существование обнаруженной закономерности в распределении мощности при преобразовании структуры электрических цепей, что, в свою очередь, подтверждает правильность тензорного характера формул преобразования в электрической цепи. Таким образом, пространство электрической цепи — это пространство-структура, образуемое последовательностями ветвей. Оно отличается от геометрического пространства, которое мы рассматривали в гл. 1. Тем не менее нам удалось построить тензорный анализ в таком пространстве.

Разработанная тензорная теория цепей может использоваться и уже многократно использовалась для моделирования, исследования и расчета цепей и систем самой различной, в том числе неэлектрической природы.

В следующей главе мы рассмотрим, какие аналогии можно установить между системами различной природы, чтобы моделировать их единым образом. Рассмотрим также, в каких областях уже применялась методология тензорного моделирования, пример ее применения для расчета экономической задачи балансового планирования и перспективы дальнейшего развития.

Таким образом, мы не зря обратились к опыту. Он пролил нам некоторый свет на предмет споров и дискуссий, которые мы приводили на с. 6—10.

Глава 3.

ПУТЬ К ТЕНЗОРНОЙ ТЕОРИИ СИСТЕМ

Единство природы обнаруживается в «паразитической аналогичности» дифференциальных уравнений, относящихся к разным областям явлений.

В. И. Ленин

Итак, мы вооружились простейшим тензорным инструментом для исследования и расчета всех сложных систем, которые удастся представить эквивалентными моделями в виде электрических цепей. Главное, что удалось нам получить в предыдущей главе, — это возможность совместного исследования целого семейства электрических цепей с различной структурой, при котором одновременно используются как уравнения поведения (законы Ома), так и структуры цепи (формулы преобразования).

Это объединение, реализуемое тензорным анализом цепей, теперь должно применяться для исследования, расчета менее изученных видов сложных систем. Возможность объединенного исследования процессов и структуры представляется главным достоинством тензорной методологии в теории систем, отличающей ее от других подходов.

Наметим план применения тензорной методологии для исследования различных сложных систем, последовательность этапов, которая должна выполняться в каждом случае. Эту последовательность можно рассматривать как своеобразную технологию применения тензорного подхода в теории систем. Наша задача состоит в том, чтобы обрисовать технологию в общих чертах, рассмотреть физические и структурные основы ее применения к разнородным на первый взгляд непохожим системам, дать иллюстрацию применения технологии на простом примере. Наконец, надо наметить программу дальнейшего развития и обобщения тензорной методологии для исследования более сложных систем (многомерных, нелинейных), чем те, которые можно представить моделями в виде электрических цепей.

3.1. ТЕХНОЛОГИЯ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕНЗОРОВ В ТЕОРИИ СИСТЕМ

Под технологией тензорной методологии будем понимать последовательность этапов проведения преобразований, позволяющих использовать тензоры для расчета различных сложных систем. Кроме того, в это понятие входит и совокупность инструментальных средств, включающих теоретическое, модельное, алгоритмическое, программное обеспечение, которые позволяют:

выделить некоторую совокупность систем в один класс по аналогии протекающих в них процессов и структурных отношений;

выбрать среди этих систем одну в качестве эталонной, для которой разработан тензорный метод расчета, объединяющий структурные и метрические соотношения, т. е. структуру и протекающие в ней процессы;

привести уравнения исследуемой сложной системы к тензорному виду, используя все соотношения между потоками, величинами и процессами, протекающими в системе, в том числе такие, которые оказываются лишними, избыточными при расчете другими методами;

привести в соответствие эти тензорные уравнения с уравнениями эталонной системы и построить соответствующую эквивалентную модель исследуемой сложной системы.

(Эти этапы служат для «настройки» на заданную предметную область в каждом конкретном случае.)

полученную модель можно рассчитывать единым — тензорным — методом расчета эталонной системы независимо от того, какого рода системе эта модель соответствует;

если модель — электрическая цепь, то ее можно исследовать, рассчитывать средствами тензорного анализа цепей, который изложен в предыдущей главе. При этом, если число элементов систем настолько велико, что расчет ее как целого производить слишком трудоемко или невозможно, то необходимо применять метод расчета по частям, который получил название диакоптики [Крон Г., 1972].

Суть метода диакоптики состоит в том, что модель системы аналитически расчленяется на независимые подсистемы и связывающую их цепь пересечений. Результаты расчета сравнительно небольших подсистем используются в качестве воздействий для цепи пересечений. Поскольку для цепи пересечений отклики подсистем служат воздействиями, то она рассчитывается как двойственная по отношению к подсистемам. Результаты расчета цепи пересечений используются как дополнительные воздействия, учитывающие взаимодействие подсистем. В сумме результаты расчета подсистем и обратной реакции на подсистемы составляют полное решение системы как единого целого. Это значительно повышает скорость и эффективность расчета больших по размеру сложных систем. Фактически метод диакоптики включает в себя всю нашу технологическую цепочку для систем, представимых

моделями в виде электрических цепей. Расчет цепей по частям можно рассматривать как обобщение тензорного анализа цепей для случая, когда ветви в простейшей цепи представляют собой целые цепи, состоящие из многих ветвей.

Наконец, последний по порядку, но не по важности этап состоит в анализе соответствия понятийного аппарата исследуемой и эталонной систем. Дело в том, что если различных понятий и величин в эталонной системе оказывается больше, чем это фактически необходимо для моделирования, представления понятий и величин исследуемой системы, то можно поставить вопрос: а чему могли бы соответствовать эти «лишние», свободные понятия в самой исследуемой системе? Нет ли при этом возможности расширить и обобщить семантическое содержание исследуемой системы, повысить содержательность и эффективность решаемых в этой предметной области данным методом задач, расширить их круг? Такая возможность расширить по аналогии с эталоном семантику предметной области, получить более общую физическую картину рассматриваемых явлений, а также новые знания об исследуемой системе является, по-видимому, даже более важным преимуществом тензорной методологии, чем экономия вычислений, достигаемая методом диакоптики.

На рис. 3.1 схематически представлены основные особенности перечисленных этапов. Этапы, обеспечивающие настройку на данную систему, обозначены как функциональные системы, а этапы, обеспечивающие расчет построенной модели единым методом, — как обеспечивающие системы.

Наиболее важным моментом для приведения уравнений исследуемой системы к тензорному виду является геометризация этой системы — определение для нее пространства, систем координат в нем, преобразования координат, выделение ковариантных, контравариантных и инвариантных объектов, построение их формул преобразования, т. е. все, что мы уже делали в первых двух главах.

Тензорное, геометрическое представление различных систем позволяет привести их к виду и форме, допускающим сравнение разнородных систем по тем «стандартам», которые мы ввели для тензорных преобразований. Возникающие при этом аналогии в различных системах для таких понятий, как ковариантность, контравариантность, метрика, преобразование и т. д., рассматриваются в следующем параграфе.

При моделировании исследуемой системы с помощью эталонной возможны три случая установления соответствия между их понятиями:

- 1) взаимно однозначное соответствие, т. е. модель точно представляет структуру и процессы, протекающие в системе;
- 2) не все понятия исходной системы представлены моделью, это значит, что данной эталонной системы недостаточно для моделирования, модель не построена;

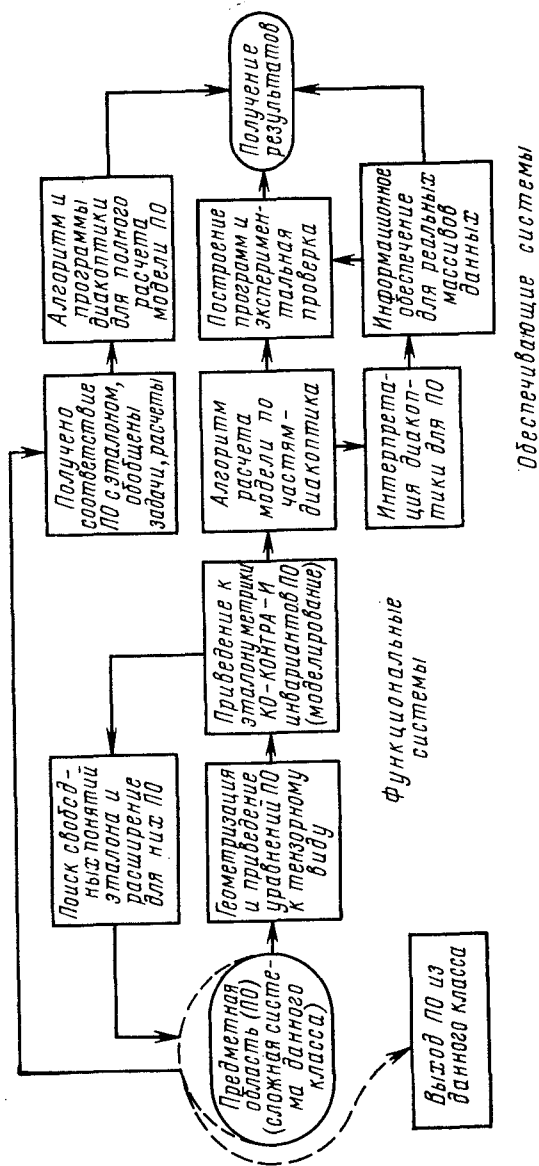


Рис. 3.1. Этапы технологии расчета сложных систем тензорным методом

3) если модель построена, но при этом не все понятия эталона использованы для представления понятий исходной системы, то можно оставшиеся свободными понятия использовать для «обратной интерпретации» в предметной области исходной системы с целью увеличения исходного списка понятий и обобщения на этой основе характера и круга решаемых задач.

В последнем случае может оказаться, что в расширенной предметной области смысловое содержание новых задач потребует введения таких понятий, которые уже не отображаются в данной эталонной системе. Тогда потребуется перейти к эталонной системе более общего, более сложного типа. Это выводит рассматриваемую систему за пределы данного класса и позволяет последовательно генерировать и решать с помощью тензорной методологии все более сложные задачи из данной предметной области.

Большую роль в разработке и применении тензорного подхода к исследованию различных систем, превращению его на деле в тензорную методологию, сыграли, как отмечалось в гл. 1, работы Г. Крона. По эволюции его работ можно фактически проследить значительную часть истории развития этого направления в теории систем.

Мы рассмотрели кратко вопросы, связанные с тензорным анализом электромеханических устройств (вращающихся электрических машин), подробно остановились на тензорном анализе электрических цепей в более широком смысле — сетей.

Используя тензорный анализ сетей как эталонную систему, Крон в течение 40—50-х годов применял тензорный метод к исследованию и расчету различных систем. Даже простое перечисление видов этих систем дает представление о широких возможностях этого подхода.

В 40-е годы были построены и применялись для расчетов модели в виде электрических цепей для уравнений математической физики. Были построены модели уравнений Максвелла, Шредингера, упругого поля, движения сжимаемой и несжимаемой жидкости. Для построения моделей использовалась тензорная форма этих уравнений или они предварительно приводились к тензорному виду. Были построены также модели для численных расчетов уравнений в частных производных. В качестве примера на рис. 3.7 воспроизведен общий вид модели в виде электрической цепи уравнений электромагнитного поля Максвелла. Построение такой модели уже само по себе было достижением, поскольку попытки построить механическую модель этих уравнений окончились, как известно, неудачей.

Эта модель, как и другие такого типа, является дискретной в том отношении, что представляет значениями токов и напряжений значения величин уравнений Максвелла в отдельных точках пространства. Другими словами, если в пространство поместить решетку из кубов, то модель дает значения величин уравнений для вершин этих кубов, в каждой точке пространства не непрерывным образом. Такой куб — «ячейка» модели — и представлен на рисунке. Получить не-

прерывные значения величин уравнений Крона, судя по некоторым неполным публикациям, удалось при использовании в качестве модели совокупности многомерных сетей, включающих сети из точек, ветвей, плоскостей, кубов и т. д. К этим сетям — полиэдральным сетям — мы вернемся в последнем разделе.

Позднее Крон и его сотрудники построили модели многоатомных молекул для изучения их спектров, линий передачи электроэнергии, электроэнергетических систем, многочисленные модели электрических машин в виде эквивалентных цепей, модели технических систем и устройств: потоков нейтронов в ядерном реакторе, больших турбин, сложных неупругих конструкций, транспортной задачи линейного программирования и т. д. Многие из этих моделей описаны в книге Крона по диакоптике [Крон, 1972], кроме того, подробнее с построением самих моделей можно познакомиться по публикациям Крона, часть которых приведена в списке литературы.

Все эти работы проводились фактически в соответствии с описанной выше технологией, основные этапы которой формировались постепенно, по мере развития исследований. Тензорная методология эволюционировала в соответствии с эволюцией науки и техники.

Первоначально, в 30—40-е годы, интерес представляли модели сами по себе. Они использовались как средство расчетов моделируемых систем аналоговыми методами. Модели реализовывались физически с помощью электротехнических стендов. Эти стенды позволяли собирать схемы из проводников и источников с соответствием со структурой модели. Включая источники, можно было непосредственно измерить отклики на элементах модели, интерпретируя их затем в терминах исходной системы. Эквивалентные цепи, таким образом, использовались как аналоговые вычислительные машины.

Время, однако, шло, и на первый план вышли цифровые электронные вычислительные машины. В связи с этим важнее стала не физическая аналоговая реализуемость, а единое аналитическое представление различных систем, которое обеспечивали эквивалентные модели. Кроме того, весьма важной была возможность восстановления по аналогии более ясной и общей физической картины процессов, происходящих в исследуемой системе. С другой стороны, постоянное усложнение задач, систем, рост числа их элементов и связей, выдвинули проблему исследования, расчета, проектирования сложных систем. Размеры таких систем, структура связей становятся таковы, что опережают рост быстродействия и памяти ЭВМ. Это сделало актуальной разработку методов декомпозиции, позволяющих производить исследование по частям тех систем, анализ которых как целого вызывает затруднения.

Разработанный Кроном аппарат диакоптики как раз отвечал этим требованиям. Этот метод обеспечивает разделение, расчет по частям и последующее объединение в целое моделей различных систем в виде цепей. При таких расчетах основными являются действия с матрицами, которые эффективно реализуются на цифровых ЭВМ. Таким обра-

зом, эквивалентная модель стала использоваться в 50-60-е годы не как аналоговая машина, а как эталонная структура, обеспечивающая построение алгоритмического и программного обеспечения любой промоделированной системы. Таким образом, непосредственные измерения на физически реализованных элементах модели были заменены численными расчетами моделей в аналитическом представлении.

Диакоптику как метод расчета электротехнических систем по частям разрабатывает и развивает сотрудник Крона — Х. Хэпп [Хэпп, 1974], который применил также кусочные методы для проектирования энергетических систем [Нарр, 1980], связывающих потребителей и поставщиков электроэнергии в масштабах страны. Однако ограничение области применения диакоптики электротехническими системами не полностью соответствует тому смыслу, который вкладывал в это понятие сам Крон. Диакоптика представлялась им именно как тензорная методология исследования сложных систем самой различной (не только электротехнической) природы. Расчет по частям при этом является важным, но только лишь одним из тех технологических этапов, которые мы перечислили выше.

Самым трудным и наименее изученным в тензорной методологии является этап построения модели — установление аналогий и соответствия между величинами, понятиями, уравнениями различных исследуемых сложных систем как между собой, так и с системой, выбранной в качестве эталонной.

В самом деле, какие у нас основания представлять одну величину как ток, а другую — как напряжение или импеданс? В этом вопросе многое решает инженерная интуиция исследователя. Крон писал, что процесс построения модели является скорее искусством, чем наукой.

Судя по резкому сокращению появляющихся новых моделей систем, особенно незлектрических, которое произошло после смерти Крона, это его мнение остается справедливым и сегодня. Тем не менее необходимость в разработке единого метода представления и сравнения различных систем возрастает. Такой метод должен обеспечить единый каркас, единую структуру для сравнения и анализа стремительно разрастающегося семейства современных сложных систем, дать более организованную картину, чем представляет собой разобщенный узкими специализациями научно-технический мир.

Таким образом, вопрос о построении моделей есть и вопрос поиска общего знаменателя для различных областей науки и техники, а следовательно, и вопрос описания мира возможно меньшим числом понятий. Этот вопрос, следовательно, имеет не только научно-практическое, но и важное методологическое значение.

Вряд ли мы сможем сколько-нибудь полно решить этот вопрос в рамках этой книги. Однако постараемся коротко рассмотреть основные аналогии между системами различной природы, которые делают возможным их сравнение, сопоставление, представление понятий, величин, уравнений одних систем через другие. Для этого рассмотрим не-

которые физические аналогии, существующие между системами различного типа. Рассмотрим, что из тензорных понятий сохраняется, а что изменяется и каким образом при переходе от одних систем к другим. Продемонстрируем на примере балансового планирования процедуру геометризации, приведения к тензорному виду и построения эквивалентной электрической цепи, а затем вернемся к вопросам разработки и построения моделей более общего, многомерного вида в виде полиэдральных цепей. Проблема построения и применения полиэдральных сетей является наименее изученной и, по-видимому, наиболее перспективной в тензорной методологии.

3.2. КОВАРИАНТНОСТЬ И КОНТРАВАРИАНТНОСТЬ В ТЕОРИИ СИСТЕМ

Рассмотрим следующий простой пример [Okada S. 1955]. Предположим, что имеется отрезок и мы измеряем его длину в миллиметрах. Пусть измерение дает результат 80 мм. Это можно записать в виде $A \text{ [мм]}$, где квадратные скобки указывают единицу измерения длины, а коэффициент A — численное значение измерения для данной единицы измерения. Следовательно, в нашем случае $A \text{ [мм]} = 80 \text{ [мм]}$.

Предположим теперь, что мы увеличили единицу измерения в 10 раз и измеряем в сантиметрах. Получим результат $A \text{ [см]} = 8 \text{ [см]}$. Нетрудно видеть, что в то время как единица измерения увеличилась, значение измерения во столько же раз уменьшилось — с 80 до 8. Таким образом, значение измеряемой величины изменяется против изменения масштаба измерения и можно сказать, что длина относительно масштаба длины является контравариантным вектором.

На рис. 3.3 показано, что на такой же отрезке с некоторой плотностью расположены точки. Если мы измерим количество точек на миллиметр длины, то получим некоторое число $B \text{ [мм]}$, например 25 [мм], т. е. 25 точек на миллиметр. Увеличив теперь масштаб и считая точки на длине в 1 см, убедимся, что их стало больше пропорционально масштабу, т. е. 250 [см]. Таким образом, плотность относительно масштаба является «совместно изменяющимся» вектором, т. е. ковариантным относительно масштаба длины.



Рис. 3.3. Ковариантность и контравариантность по изменению масштабов для измеряемых физических величин

Нетрудно видеть, что здесь вводится ковариантность и контравариантность другого, чем рассмотренные в гл. 1, типа — по отношению к изменению масштабов базисных векторов.

Возникает вопрос, как вообще изменяются другие физические величины относительно изменения масштабов составляющих их по размерности величин. Ответ на этот вопрос прольет свет на ковариантный и контравариантный характер измеряемых величин и позволит лучше понять тензорный характер уравнений физических систем. Понятие физической размерности величин относится к числу наиболее фундаментальных понятий в физике.

Впервые ввел в физику теорию размерности Ж. Б. Ж. Фурье в своей известной работе «Аналитическая теория теплоты» в 1822 г. Причины появления этой теории сформулированы им так:

«Необходимо отметить здесь, что каждая неопределенная величина или константа имеет только ей присущую *размерность*, а члены одного и того же уравнения не могут быть сопоставлены, если *показатели размерностей* у них различны. Мы вводим это определение в теорию теплоты для того, чтобы сделать наши определения более точными, а также для возможности проверки анализа; оно следует из начальных замечаний о величинах; так же как в геометрии и механике, оно представляет собой эквивалент основных лемм, которые греки оставили нам без доказательства».

С тех пор было разработано много различных систем, пытавшихся выразить все физические величины через несколько основных, вплоть до действующей ныне Международной системы единиц СИ, в которой используется шесть величин.

Распространенная в физике система СГС использует три величины — длину, массу, время.

Обозначим размерность длины $[L]$, времени $[T]$ и массы $[M]$ и будем, как это делается обычно, выражать остальные величины через произведения различных степеней основных величин.

Рассмотрим скорость v . Ее размерность $[v] = [LT^{-1}]$. Изменяя скорость в сантиметрах в минуту, получим, например, 50 см/мин. Переходя к секундам, видим, что единица измерения в 60 раз уменьшится, и само измерение этого же объекта — скорости — уменьшится в 60 раз: 5—6 см/с. Таким образом, скорость ковариантна по времени.

Если мы перейдем к другой единице длины, то выражая эту же величину в миллиметрах, получим результат измерения в 10 раз больше. Следовательно, по длине скорость контравариантна. Итак, скорость ковариантна по времени и контравариантна по длине. С другими физическими величинами дело обстоит хуже.

В формулах размерностей сетей, основанных на использовании в качестве первичных величин длины L , времени T и массы M , появляются дробные показатели, лишённые физического смысла и затрудняющие наглядность представления ковариантного и контравариантного характера физических величин. Между тем многие исследователи считали, что можно выразить все физические величины через длину и время. Еще Максвелл в 1873 г. отмечал возможность выражения всех физических величин в терминах длины и времени [Maxwell, 1873].

Интерес к этому проявляли Кельвин, Эддингтон и др. Наконец, такую систему разработал Б. Браун [Brown, 1941].

Браун писал, что построение этой системы тесно связано с измеримостью физических величин и что сама «физическая величина — это то, что может быть измерено». Измерены же могут быть непосредственно лишь пространственные и временные интервалы путем снятия показаний приборов вместе с подсчетом.

«... Существуют лишь два способа непосредственного использования показаний стрелок в процессе введения чисел в природу: в одном случае совмещение состоит из двух различных пар отметок; в другом случае — по крайней мере одна из отметок, а обычно обе отметки, должна быть той же самой в каждой паре совмещения. Тогда первый тип наблюдений приводит к измерению длины или пространственного интервала, а второй — к измерению интервала времени ... Число всегда находится обычным счетом». Измерения всех других величин состоят из измерений длины и времени. Браун не без юмора отмечает: «В связи с этим полезно вспомнить, что масса представляет собой коэффициент, придуманный Ньютоном, сила — это воображаемая причина изменения, а потенциал — чистейший западноевропейский миф. Ни одна из них не может быть поэтому измерена непосредственно». Таким образом, «... общепринятые приемы состоят из визуальных наблюдений за совмещением двух отметок вместе с подсчетом. В точной науке необходимы лишь эти наблюдения, и это позволило Эддингтону описать физика как человека, которому не нужны какие-либо органы чувств, помимо глаз, даже дальтоника, и назвать объектами его пристального внимания *показания стрелок*». На основе этого и была построена система, где все физические величины выражались через две основные — длину L и время T .

Известный советский авиаконструктор Р. Л. Бартини в 1966 г. независимо построил такую же систему, а также LT -таблицу, в которой все физические величины располагаются в клетках, соответствующих степеням L и T (см. таблицу в статье Р. Л. Бартини и П. Г. Кузнецова [1974]). Мы оставим здесь в стороне вопрос о размерности и измеримости энтропии и температуры, вызвавшей острые дискуссии.

Метод построения LT -таблицы заключается в следующем. Масса M может быть выражена через L и T из двух выражений для силы: второго закона Ньютона $F = ma$ и закона гравитации

$$F = \gamma (m_1 m_2 / r^2).$$

Полагая гравитационную постоянную γ величиной безразмерной и приравнивая эти выражения для силы¹, получим:

¹Интересно отметить, что, поступая так, мы положительно решаем тонкий философский вопрос физики о тождественности инертной и гравитационной масс. Возможность построения столь элегантной системы размерностей является веским аргументом в пользу такого решения.

$\gamma m = ar^2$, откуда формула размерности массы

$$[M] = [a] L^2 = LT^{-2}L^2 = L^3T^{-2}.$$

Очевидно, что масса трижды контравариантна по длине и дважды ковариантна по времени.

Выражая подобным образом остальные физические величины, мы получим, что все размерности имеют целочисленные коэффициенты.

Размерность силы получим из второго закона Ньютона

$$[F] = [a] [M] = LT^{-2}L^3T^{-2} = L^4T^{-4}.$$

Работа, равная по размерности энергии, вычисляется, например, из произведения приложенной силы на пройденное расстояние. Следовательно, размерность энергии

$$[E] = [F] L = L^5T^{-4}.$$

Поток энергии — мощность — выражается энергией в единицу времени.

$$[P] = [E] T^{-1} = L^5T^{-5}.$$

Мощность пять раз контравариантна по длине и пять раз ковариантна по времени. Это означает, что при изменении единицы L в n раз P изменится противоположным образом в n^5 раз, а при изменении T в k раз P изменится таким же образом в k^5 раз. Тогда мощность можно изобразить как геометрический объект с пятью верхними (ковариантными) и пятью нижними (контравариантными) индексами: $P^{\alpha\beta\gamma\mu\zeta}_{\kappa\epsilon\nu\delta\theta}$.

Следует отметить, что еще Схоутен [1965] обсуждал ковариантность и контравариантность для физических величин:

«Чтобы начертить вектор, соответствующей скорости, необходимо ввести единицу времени, и если эта единица изменяется, то изменяется также изображение скорости. Отсюда мы видим, что величины в физике имеют свойство, которым не обладают геометрические величины. Их компоненты изменяются не только при преобразованиях координат, но также при преобразованиях некоторых единиц.

В отношении этих единиц, мы отметим, что всегда имеются некоторые *основные* единицы, а все остальные единицы, *производные* единицы, могут быть из них получены.

В целях иллюстрации мы используем четыре основные единицы: массы, длины, времени и электрического заряда (M , L , T и Q). Результаты легко переносятся на любой другой выбор основных единиц».

Очевидно, что Схоутен не был знаком со статьей Брауна, иначе его, несомненно, привлекла бы открывающаяся простота выражения всех величин через целочисленные показатели и возможность ясного введения контра- и ковариантности относительно изменения масштабов пространства и времени.

Возникает вопрос: могут ли физические величины обладать иными законами преобразования и относительно каких систем координат? Рассмотрим понятия «продольных» и «поперечных» величин. Файрстоун [Firestone, 1933] ввел разницу между физическими переменными двух типов: продольными и поперечными. *Поперечные* переменные такие, как скорость, напряжение, давление, температура и концентрация (химический потенциал), выражаются как разности и измеряются в двух пространственно различных точках. Соответствующие *продольные* переменные — сила, ток, поток жидкости, поток тепла и поток массы — измеряются в одной точке. Произведение переменных каждой пары имеет размерность мощности.

С философской точки зрения можно видеть, что существование двух типов переменных, которые мы обозначили как продольные и поперечные, обеспечивает простейшее понимание функций, генерирующих инварианты, такие как энергия и мощность. Если существуют два базовых типа переменных, с помощью которых описывается физический мир (ковариантные, контравариантные), и если имеется некоторое согласование двух наблюдателей любого конкретного события, рассматриваемого из их соответствующих систем отсчета, то произведение коварианта и контраварианта может генерировать требуемый инвариант (например, напряжение, умноженное на ток дает мощность).

Свойства ковариантности и контравариантности — это поведение объекта относительно преобразования. Каждый объект мы можем представить состоящим из более простых. Например, физическая величина по размерности есть произведение степеней размерностей длины и времени, а вектор есть сумма произведений единичных векторов и проекций вектора на соответствующие оси координат.

В зависимости от того, как ведет себя объект, когда мы заменяем одну систему представляющих его простых объектов на другую систему, мы относим его к ковариантам, контравариантам или инвариантам. При этом нас интересует не изменение самого объекта (предполагается, что сам он остается неизменным в процессе преобразования), а изменение его представления через более простые объекты (в геометрии это суть компоненты в системе координат).

В самом деле такие «компоненты» — это некоторые качества (характеристики) объекта, выраженные элементарными носителями этих качеств (для объектов n -мерного пространства — n векторами базиса). Объект может представляться, например, некоторым набором чисел, каждое из которых характеризует степень отклонения объекта от эталонного (базисного) носителя этих качеств. При изменении величины эталона меняется и соответствующее число (координата) — характеристика объекта по этому качеству.

Если число меняется в том же направлении, как изменился эталон, — объект ковариантен по этому качеству. Если число меняется противоположным образом — объект контравариантен. Если же число

не меняется, то объект называется инвариантным относительно этих изменений или преобразований.

Таким образом, разложение любого объекта на составляющие его более простые объекты можно трактовать как представление объекта в частной системе координат некоторого пространства.

Составляющие объекта задают измерения этого пространства, а их конкретный вид для данного случая — значение «координаты» вдоль данного измерения. Ясно, что такое «пространство» может очень сильно отличаться от обычного геометрического пространства и даже от пространства-структуры электрической сети, причем настолько сильно, что можно усомниться, позволительно ли назвать это пространством. Достаточно сказать, что, может быть, набор компонент не образует вектора, поскольку оси координат могут представлять несоизмеримые величины.

Попробуем разобраться, какими свойствами пространства можно пожертвовать, сохранив при этом возможность говорить о системах координат, их преобразованиях, базисе, ковариантности, контрвариантности и инвариантности.

В электрической цепи соединение ветвей — структура — задает пространство, размерность которого определяется числом ветвей, т. е. числом линейно-независимых путей распространения в этой структуре потоков энергии.

Систему координат, задаваемую путями, проходящими через те или иные ветви, можно выбрать, в отличие от обычного пространства, конечным числом способов.

Линиями координат оказываются ветви или последовательности ветвей в пространстве-структуре. Эти ветви могут представлять различные объекты реальной действительности и в зависимости от этого базис такой системы координат будет различным.

Если рассматриваются электрические цепи, то ветви с импедансами представляют сами себя, а их соединения — структуру электрической цепи. Словом, электрическая цепь служит моделью самой себя.

Каждая ветвь цепи может также представлять собой более сложные электротехнические устройства. Например, ветвь — это может быть целая электрическая цепь, или электрическая машина, или электронная лампа и т. д. Тогда эти электротехнические устройства и задают базис вдоль линий координат — путей, образуемых ветвями.

Электрические цепи используются для представления (моделирования) структуры неэлектрических систем самой различной природы при условии, что описание этих систем (уравнения поведения и т. д.) представлены в тензорном виде. Тогда в качестве базиса, заданного ветвями, оказываются различные объекты действительности.

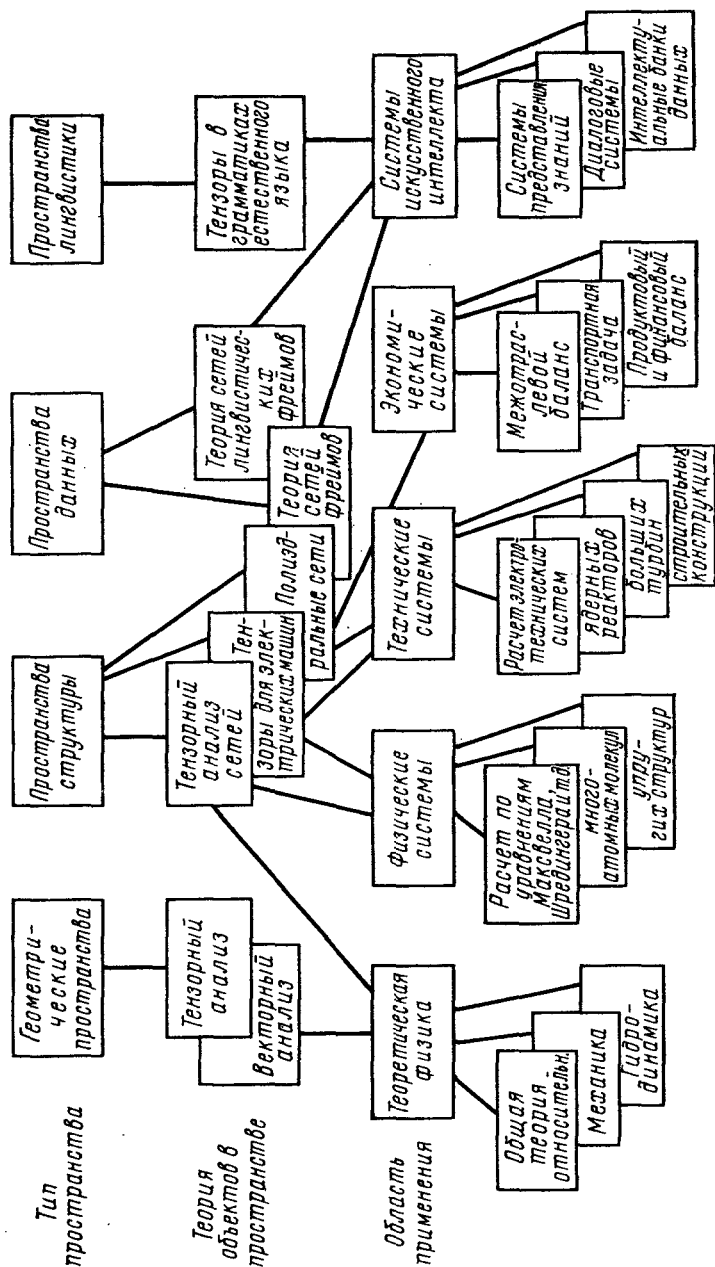
В качестве элементов такой структуры могут, при дальнейшем обобщении, рассматриваться некоторые неформализуемые стандартные ситуации действительности. Такие объекты, вводимые в системах

искусственного интеллекта, получили название фреймы. Под *фреймом* понимается некоторая минимальная структура понятий и отношений между понятиями, описывающая неформализуемую стандартную ситуацию реальной жизни, притом такую структуру, дальнейшее дробление которой приводит к разрушению описываемой стандартной ситуации [Поспелов, 1981]. Такое определение фрейма в точности соответствует определению элемента примитивной сети — ветви. Ветвь есть некоторая «минимальная ситуация» электрической сети, «молекула сети», дальнейшее дробление которой приводит к расслоению на элементы, не представляющие электрической цепи. Подобно тому, как из ветвей строится сеть с помощью группы матриц S_{α}^{α} , можно также ввести группу матриц преобразования для построения сетей фреймов. Тогда фреймы будут тем базисом, по которым раскладывается на компоненты область, описываемая с их помощью. При отсутствии в определении фрейма таких понятий, как инвариантная величина, метрический тензор и т. д., мы не можем еще вводить понятий ковариантности и контравариантности, но уже можем рассматривать фреймы как аффинные тензоры в пространстве без метрики.

Если же в неформализуемой структуре фреймов удастся выделить некоторые инварианты относительно преобразований фреймовой структуры, обнаружить двойственные друг другу пары воздействий и откликов, то тогда возможно ввести понятия ковариантности и контравариантности даже для неформализуемых базисных элементов. Наличие реальной неформализуемой ситуации, не зависящей от точки зрения исследователя, т. е. инвариантной относительно системы координат, в которой ее рассматривают, является основной тензорной характеристикой фрейма [Петров, 1982].

Обобщение тензорных пространств не ограничивается и этим. Можно ввести дискретные пространства, состоящие из отдельных точек, последовательности которых рассматривать как значения характеристик разнородных объектов. Такие пространства могут применяться в информационных системах в целях геометрического представления и обработки данных. Набор данных в той или иной системе, области, записанных в памяти ЭВМ, средства их контроля, обновления, общения составляют в совокупности содержание современных информационных систем, которые принято называть *банками данных*. Банки данных, содержащие большие массивы информации, играют все возрастающую роль в создании автоматизированных систем управления. Важной проблемой в разработке таких систем является создание языков общения, обеспечивающих пользователю быстрый доступ ко всем хранимым данным. Структура этой системы должна обеспечивать целостность базы данных, т. е. вносимые изменения должны производиться во всех массивах, где хранится изменяемое данное, и т. д.

Один из подходов к описанию действий с базой данных — введение пространства данных, состоящего из набора отдельных точек. После-



довательности точек, характеризующие значения некоторых понятий, например, станка, здания или коллектива, рассматриваются как оси координат. Точки в пространстве характеризуют отношения между значениями своих проекций на оси координат, которым они соответствуют. Это позволяет ввести группу матричных преобразований над такими объектами, реализующих тензорные преобразования. Эти операции, основанные на реляционной алгебре отношений между данными, используются в качестве языка общения, имеющего преимущества по сравнению с реляционными языками общения [Кузина И. В., Петров А. Е., 1976].

Из тензорных понятий здесь остаются преобразования координат и инвариантность объекта относительно этих преобразований. В качестве инварианта рассматривается сам набор данных, с которыми производятся те или иные операции. В пространстве данных появляется даже возможность определения понятий ковариантности и контравариантности [см. Кузин Л. Т. и др., 1984].

В качестве другого инварианта можно рассматривать произведение объема памяти ЭВМ, распределяемого для хранения данных, на быстродействие банка. Суть этого инварианта в следующем. Если хранить всю возможную информацию о данных и отношениях между ними, то ответ на любой запрос производится быстро. Если же хранить только основные данные и набор правил вывода отношений между ними, то объем памяти уменьшается, но требуется сравнительно больше времени для генерации ответа на запрос.

Еще более необычным является применение тензорных понятий в лингвистике. При этом вводится пространство, заданное лингвистическими объектами [Сухотин, 1978]. В качестве объектов пространства рассматриваются имена, частоты появления которых в анализируемом тексте служат координатами. Предикаты при этом оказываются ковариантными, а имена — контравариантными относительно преобразований, изменяющих степень грамматической однородности. В таких пространствах возникает проблема введения базиса; сферой их применения является анализ текстов. Такая геометрическая модель в принципе позволяет изучать смысловые инварианты, сохраняющиеся при переводах и пересказах.

Общая схема применения тензорной методологии для различных областей науки и техники представлена на рис. 3.2.

Таким образом, введенные в тензорном анализе понятия ковариантности, контравариантности, инвариантности оказываются шире своего первоначального формального определения и допускают обобщение на такие случаи, когда фактически уже нет тех пространств, систем координат и групп преобразований, для которых они были первоначально определены.

Наконец, признаки тензорного подхода можно обнаружить даже в поэзии. Например, очерк М. Цветаевой «В. Маяковский и Б. Пастернак» начинается следующими словами: «Если я, говоря о современной

поэзии России, ставлю эти два имени рядом, то потому, что они стоят рядом. Можно, говоря о современной поэзии России, назвать одно из них, каждое без другого и вся поэзия будет все-таки дана, как в каждом большом поэте, ибо поэзия не дробится ни в поэтах, ни на поэтов, — она во всех своих проявлениях одна, одна, в каждом — вся, так же, как по существу нет поэтов, а есть поэт, один и тот же с начала и до конца мира, сила, окрашивающаяся в цвета данных времен, племен, стран, наречий, лиц, проходящих через нее, силу несущуюся как река теми или иными берегами, теми или иными небесами, тем или иным днем».

Как видим, этот абстрактный «поэт один и тот же с начала до конца мира» может рассматриваться как инвариант, проекции которого в различных системах координат — конкретных поэтах — могут принимать самые различные значения.

Таким образом, при описании процессов, протекающих в системах различной природы, можно использовать физические, а также и структурные аналогии между их понятиями и величинами. Величины можно сравнивать по их размерности, классифицируя виды отношений между ними по степени изменения их физической размерности в уравнениях, а также по их роли в качестве продольной, поперечной или инвариантной величины относительно процедур измерения. Существование аналогий позволяет моделировать одни системы с помощью других систем.

3.3. ТЕНЗОРНАЯ ФОРМА УРАВНЕНИЙ БАЛАНСОВОГО ПЛАНИРОВАНИЯ

Мы не в силах охватить здесь все примеры сложных систем, для исследования которых Г. Крон применял тензорную методологию. Для этого необходимо вникать в особенности каждой из этих предметных областей, что достаточно трудоемко. Для подробного знакомства с ними автор рекомендует читателю переведенные на русский язык работы Крона. Тензорный анализ электрических цепей, используемых в качестве эталонной системы для моделирования других систем, изложен в уже упомянутой книге «Тензорный анализ сетей» [Крон, 1978]. Новизна тензоров на структурах в изложении инженера породила споры вокруг этого предмета, частью представленные в спектре мнений о работах Крона в § 1.6. Многочисленные примеры применения этого аппарата для исследования и расчета сложных систем различной природы путем построения для каждой из них соответствующей эквивалентной электрической цепи и дальнейший расчет по частям собраны в книге «Исследование сложных систем по частям — диакоптика» [Крон, 1972].

Примеры построения эквивалентных цепей для различных типов электрических машин приведены в книге «Тензоры для цепей», которая дважды издавалась за рубежом [Крон, 1951, 1967], но на русский язык не переведена.

В качестве примера применения тензорной методологии рассмотрим расчет задачи балансового планирования в экономике. Эта задача интересна по нескольким причинам. Во-первых, это пример применения тензорных понятий за пределами рассмотренных нами областей математики, геометрии и электротехники. Во-вторых, уравнения баланса достаточно просты, чтобы мы смогли их моделировать одномерной электрической цепью с контурным и узловым возбуждением. В-третьих, оказывается, что применение модели позволяет не только повысить скорость и эффективность расчета потоков продуктов в сложной экономической системе, обеспечивающих выполнение плана, но и дает обобщение самой рассматриваемой предметной области. А именно, помимо потоков продуктов, представленных комбинацией контурных и узловых токов, модель позволяет рассчитать величины напряжений на ветвях модели, не предполагавшиеся исходной постановкой задачи. Эти величины пропорциональны воздействиям, которые существуют в экономической системе и которые соответствуют потокам финансов, распределяемых отраслями для выполнения плана. Таким образом, построенная тензорная модель дает возможности расчета объединенного материально-финансового баланса экономической системы. В-четвертых, и это самое важное, задачи автоматизации планирования и управления экономикой чрезвычайно актуальны, причем приобретают все возрастающее значение в условиях резкого увеличения масштабов народного хозяйства, усложнения его структуры, а также повышения требований по усилению плановой и трудовой дисциплины.

Задачи составления балансов имеют приложения не только в экономике. В сельском хозяйстве, например, составляют балансы содержания в почве различных компонентов для определения необходимого набора удобрений, последовательности севооборота для поддержания максимальной многолетней урожайности и т. д. В диетологии решается задача питания, обеспечивающая при данном наборе продуктов, содержании в них белков, жиров, углеводов, микроэлементов и т. д. оптимальный режим питания для здорового организма, специальные диеты при различных заболеваниях. Для оценки обстановки в Арктике важен расчет баланса тепла, переносимого теплыми и холодными потоками воздуха из одного района в другой. И так далее.

Рассмотрим достаточно простой вариант постановки задачи балансового планирования в применении к экономике. Заметим, что при возрастании числа элементов, связей между ними любая из рассмотренных областей представляет собой сложную для расчета задачу. Особенно это касается экономики, масштабы которой возросли настолько, что только в Госплане планируется несколько тысяч показателей, а в целом по стране — десятки миллионов.

Чем может помочь в расчете такой сложной системы тензорная методология расчета сложных систем? Согласно тому, о чем ранее говорилось в этой главе, мы должны выполнить следующие этапы:

1. Рассмотреть физическую и геометрическую, структурную стороны явления — процесса производства и распределения потоков продуктов; составить или использовать соответствующие уравнения.

2. Привести эти уравнения к тензорному виду. Для этого дать геометрическую трактовку задачи: ввести пространство, определить системы координат, их преобразования, геометрические объекты и т. д. Важно при этом использовать все возникающие соотношения между потоками в системе, в том числе такие, которые в других методах оказываются лишними, избыточными, но для построения тензорных формул преобразования необходимы.

3. Выбрать эталонную систему для моделирования баланса продуктов, тензорные и топологические отношения в которой достаточны для установления аналогий и моделирования. Характер уравнений баланса таков, что для моделирования оказывается достаточно использовать электрическую цепь и, соответственно, рассмотренный в гл. 2 тензорный аппарат ее расчета.

4. Построить модель для тензорной формы уравнений рассматриваемой системы, т. е. эквивалентную цепь для баланса потоков продуктов.

5. Построенную модель можно использовать двояко:

а) Производить расчет потоков продуктов и ресурсов, межотраслевых поставок с помощью тензорного анализа сетей. Если сложность системы не позволяет рассчитывать ее как единое целое, то можно применять аппарат диакоптики, т. е. расчленив модель на отдельные независимые подсистемы и объединяющую их укрупненную цепь — сеть пересечений, рассчитать их все отдельно, а затем объединить результаты расчета в решение всей системы в целом. При этом при расчете мы имеем дело только с моделью, а не с исходной системой. Окончив расчеты, результаты следует интерпретировать в терминах исходной сложной системы.

б) Не менее важным достоинством тензорной методологии является возможность использовать аппарат понятий и отношений в эталонной системе для генерации по аналогии понятий и отношений в исходной системе, предметной области, которые, возможно, даже не входили в исходную постановку задачи и не рассматривались при расчетах, но играют важную роль в исследуемой предметной области.

Итак, рассмотрим задачу баланса продуктов. Она имеет достаточно простую постановку. Сформулируем ее и будем применять все описанные этапы.

Имеется n отраслей, каждая из которых выпускает один продукт. Валовой выпуск продукта отрасли α в течение года обозначим X_α . Этот выпуск должен обеспечивать выполнение заданного плана производства данного продукта — финишный продукт y_α , а также межотраслевые поставки потребления данного продукта $x_{\alpha\beta}$ другими отраслями рассматриваемой системы X_β . Потребность отрасли β в продукции отрасли α характеризуют так называемые коэффициенты пря-

мых затрат $a_{\alpha\beta}$, численно равные количеству продукта отрасли α , необходимого для производства одной единицы продукта отрасли β . Изменение этих коэффициентов возможно при изменении межотраслевых связей, использовании достижений науки и т. д. Если считать коэффициенты $a_{\alpha\beta}$ постоянными в течение рассматриваемого периода, то величины межотраслевых поставок выражаются формулой

$$x_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} X_{\beta}. \quad (3.1)$$

Валовой выпуск отрасли α равен сумме финишного продукта y_{α} и совокупности межотраслевых поставок $x_{\alpha\beta}$

$$X_{\alpha} = y_{\alpha} + \sum_{\beta} x_{\alpha\beta}. \quad (3.2)$$

Подставляя все значения α от 1 до n , мы получим систему уравнений баланса, а подставляя в (3.2) $x_{\alpha\beta}$ из (3.1), получим систему уравнений, в которой $a_{\alpha\beta}$ представляет собой матрицу коэффициентов прямых затрат:

$$X_{\alpha} = y_{\alpha} + \sum_{\beta} a_{\alpha\beta} X_{\beta}. \quad (3.3)$$

Помимо поставок $x_{\alpha\beta}$ отраслям необходимы некоторые ресурсы (например, живого труда и другие).

Потребность отрасли α в ресурсе k характеризуется коэффициентом $b_{k\alpha}$, показывающим количество ресурса $r_{k\alpha}$, необходимого для производства единицы продукта X_{α} . Тогда количество ресурса $r_{k\alpha}$, необходимого для производства X_{α} ,

$$r_{k\alpha} = b_{k\alpha} X_{\alpha}. \quad (3.4)$$

Потоки $r_{k\alpha}$ и $x_{\alpha\beta}$, обеспечивающие возможность производства X_{α} , также должны быть определены в ходе решения. Будем считать, что каждая отрасль обеспечивается одним ресурсом.

Распределение потоков продуктов для трех отраслей наглядно изображено на рис. 3.4.

Исходя из (3.3), мы получим валовые выпуски отраслей, обеспечивающие план и поставки

$$X_{\beta} = (\delta_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta})^{-1} y_{\alpha}, \quad (3.5)$$

где $\delta_{\alpha\beta}$ единичная матрица. Подставляя вычисленное значение X_{α} из (3.5) в (3.1) и (3.4), мы получим значения всех потоков продуктов в системе отраслей.

Матрица $(\delta_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta})$, обозначаемая также как $(I - A)$, называется «экономической матрицей». Ее размер равен числу n отраслей (производств). Время расчета обратной к ней в (3.5) растет пропорци-

онально n^3 и с ростом размера экономической системы быстро начинает превышать потребности оперативного планирования, управления. Тем более затруднен поиск оптимального плана, требующий многократного обращения ($I - A$) и сравнения получаемых планов производства валового выпуска.

Попробуем наглядно рассмотреть, как устанавливаются потоки продуктов в экономической системе при получении плана выпуска фи-

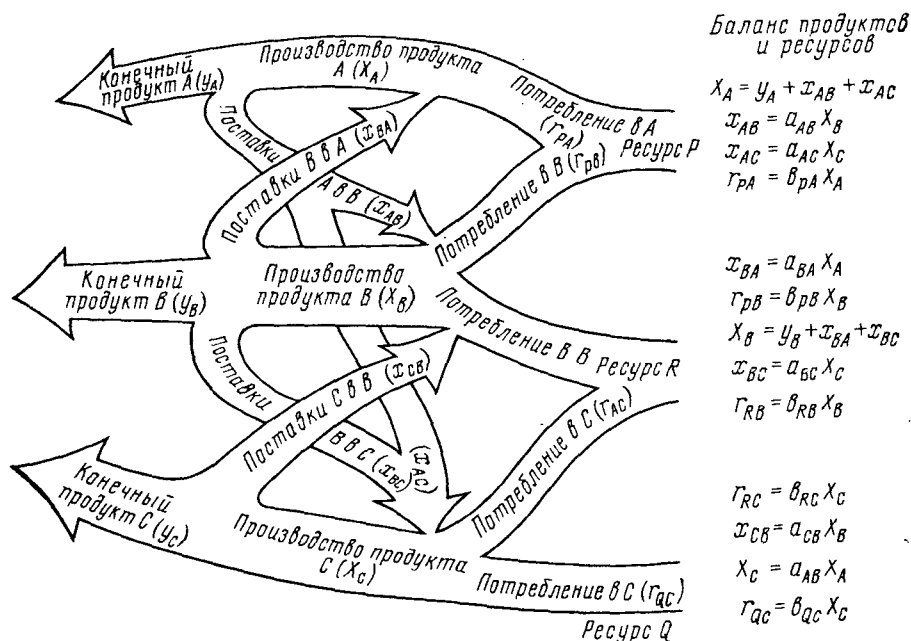


Рис. 3.4. Общая схема потоков продуктов в системе из трех отраслей, поставках между ними и ресурсах

нишного продукта. Представим себе, будто все предприятия остановлены, нет выпуска продукции, но все подготовлено к началу производства. Дан сигнал к действию: каждому предприятию, отрасли α определен план — количество выпускаемого финишного продукта y_α . Отрасли начинают выпускать свой продукт в количестве $X_\beta^0 = y_\beta$. Однако оказывается, что этого недостаточно, потому что отрасли потребляют также продукцию друг друга в соответствии с (3.1). Другими словами, надо увеличить валовой выпуск для того, чтобы обеспечить поставки. Обозначим этот выпуск X_β^1 , он равен

$$X_\beta^1 = X_\beta^0 + a_{\alpha\beta} X_\beta^0 = y_\beta + a_{\alpha\beta} y_\beta. \quad (3.6)$$

Но и этого недостаточно. Ведь возрастающие валовые выпуски потребуют увеличения поставок для обеспечения выпуска прироста на величину $a_{\alpha\beta}$ ($a_{\alpha\beta}X_{\beta}^0$)! Полный выпуск составит

$$X_{\beta}^2 = X_{\beta}^1 + a_{\alpha\beta} (a_{\alpha\beta} X_{\beta}^0) = y_{\beta} + a_{\alpha\beta} y_{\beta} + (a_{\alpha\beta})^2 y_{\beta}. \quad (3.7)$$

Не нужно большого воображения, чтобы понять необходимость продолжения процесса: очередное увеличение X_{α} потребует увеличения потоков $x_{\alpha\beta}$, т. е. нового увеличения X_{α} , и так до бесконечности, что можно представить в виде степенного ряда

$$X_{\beta} = y_{\beta} + a_{\alpha\beta} y_{\beta} + (a_{\alpha\beta})^2 y_{\beta} + (a_{\alpha\beta})^3 y_{\beta} + \dots = y_{\alpha} \sum_{p=0}^{p=\infty} (a_{\alpha\beta})^p. \quad (3.8)$$

Подставим в левую часть (3.8) значение X_{β} из (3.5), разделим обе части на y_{α} . Тогда

$$(\delta_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta})^{-1} = \sum_{p=0}^{p=\infty} (a_{\alpha\beta})^p = \delta_{\alpha\beta} + a_{\alpha\beta} + (a_{\alpha\beta})^2 + \dots \quad (3.9)$$

Как видим, задача обращения матрицы может быть сведена к вычислению суммы бесконечного степенного ряда.

Сходится ли этот ряд к определенному числу или нет, или сумма равна бесконечности—этот вопрос изучен математиками подробно. Мы рассмотрим его на качественном уровне. Довольно очевидно, что если межотраслевые поставки на каждом этапе расчета превышают y_{α} , то потребности в поставках будут пропорционально расти и валовой выпуск придется наращивать до бесконечности. Следовательно, поставки и обуславливающие их $a_{\alpha\beta}$ не должны превышать некоторого значения. При отсутствии потребления отраслью собственной продукции $a_{\alpha\alpha} = 1$. В теории доказывается, что для сходимости ряда (3.9) максимальная сумма $a_{\alpha\beta}$ в каждой строке должна быть меньше 1. Тогда можно найти значения X_{α} , удовлетворяющие плану и поставкам. В противном случае эти значения будут расти в процессе вычисления суммы (3.9) до бесконечности.

Величина каждого следующего члена ряда уменьшается неограниченно, так что если взять достаточно много его членов, то очередная прибавка станет меньше любого заданного малого числа, характеризующего точность вычислений. После достижения заданной точности вычисления прекращают: решение получено.

Схематически распределение продуктов, поставок и ресурсов изображено на рис. 3.5, где вертикальные линии соответствуют отраслям, наклонные — поставкам, стрелки внизу представляют заданный план, а ресурсы поступают на вход отрасли сверху.

Сопоставляя эту схему и уравнения баланса, можно заметить, что соотношение (3.2) описывает баланс продуктов на выходе отрасли и по форме и существу похоже на закон Кирхгофа в узлах выхода отраслей. Соотношения (3.1) и (3.4) для поставок и ресурсов, содержащие

двухиндексные объекты $a_{\alpha\beta}$ и $b_{k\beta}$, похожие на импедансы, можно сопоставить с законом Ома, где потоки продуктов играют роль токов, а X_β роль генератора напряжения.

Возникают вопросы: почему оказывается, что в (3.2) валовой выпуск — ток, а в последнем случае — двойственная ему величина — напряжение. Что соответствует балансу продуктов на входе отраслей?

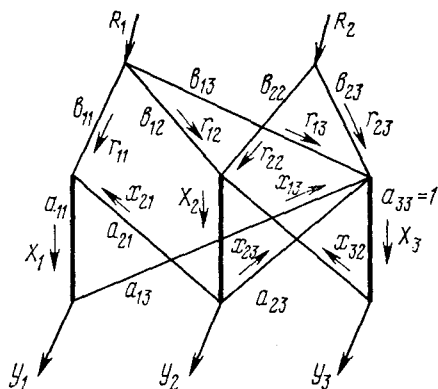


Рис. 3.5. Распределение потоков продуктов в отраслях, ресурсах и поставках

Запишем это соотношение по схеме рис. 3.5. На вход α поступают поставки других отраслей $x_{\beta\alpha}$ и ресурсов $r_{k\alpha}$, которые в сумме составляют валовой выпуск

$$X_\alpha = \sum_{\beta} x_{\beta\alpha} + \sum_k r_{k\alpha}. \quad (3.10)$$

Такого соотношения у нас не было. Что оно может означать и почему раньше не использовалось? Подставив значения x из (3.1), r из (3.4) в (3.10) и разделив обе части на X_α , получим

$$1 = \sum_{\beta} a_{\beta\alpha} + \sum_k b_{k\alpha}. \quad (3.11)$$

Это условие на житейском языке может быть выражено так: «чтобы что-то произвести, надо взять все необходимое», т. е. обеспечить требуемые поставки и ресурсы. Это закон сохранения потока, аналог закона Кирхгофа для входов отраслей. Как мы видели, в процессе расчета баланса ни при обращении матрицы $(I-A)$, ни при вычислении суммы ряда (3.9) это соотношение не потребовалось. А для приведения уравнений баланса к тензорному виду?

Произведем геометризацию задачи. Для этого введем в рассмотрение пространство потоков продуктов. Размерность такого пространства определяется числом отраслей в системе. В самом деле, задав n

валовых выпусков, мы тем самым определяем величины поставок и ресурсов согласно (3.1) и (3.4). Следовательно, они линейно зависимы от выпусков. Различные конфигурации, структуры такого пространства (обозначим его F) определяются способом соединения отраслей друг с другом, а n отраслей определяют систему координат. Выбрав другое соединение тех же отраслей, мы получим другую систему координат. Что можно рассматривать в качестве инварианта такого преобразования? Допустим, инвариантом является план, например, для заданного плана мы рассматриваем различные соединения отраслей в поисках, скажем, оптимального варианта. Рассмотрим два соединения α и α' одних и тех же n отраслей:

$$y_{\alpha} = (\delta_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta}) X_{\beta}; \quad (3.12)$$

$$y_{\alpha'} = (\delta_{\alpha'\beta'} - a_{\alpha'\beta'}) X_{\beta'}. \quad (3.13)$$

Поскольку $y_{\alpha} = y_{\alpha'}$, то можно приравнять правые части и выразить $X_{\beta'}$ через X_{β} :

$$X_{\beta} = (\delta_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta})^{-1} (\delta_{\alpha'\beta'} - a_{\alpha'\beta'}) X_{\beta'}$$

или, обозначив

$$(\delta_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta})^{-1} (\delta_{\alpha'\beta'} - a_{\alpha'\beta'}) = A_{\beta}^{\beta'}, \quad (3.14)$$

получим

$$X_{\beta} = A_{\beta}^{\beta'} X_{\beta'}, \quad (3.15)$$

что, как мы знаем, соответствует по форме закону преобразования ковариантной величины.

Заметим, что валовой выпуск X_{α} играет двойственную роль: в уравнении типа (3.1) он является воздействием, вызывающим соответствующие потоки поставок, а в уравнении (3.2) — потоком продукта и по размерности одинаков с потоком поставок, т. е. валовой выпуск и поставки здесь можно суммировать.

Переход от воздействия к отклику мы совершили для валового выпуска тогда, когда при получении уравнения (3.5) вынесли X_{β} за скобки. При отсутствии собственного потребления в отрасли X_{α} и X_{β} численно равны, но их связывает соотношение

$$X_{\alpha} = \delta_{\alpha\beta} X_{\beta}, \quad (3.16)$$

которое показывает, что X_{α} и X_{β} должны иметь различные законы преобразования. Поскольку потоки продуктов удобнее рассматривать как токи, то тогда поток валового выпуска на выходе отрасли мы должны рассматривать как контравариантную величину и записывать как X^{α} . Соответственно изменяются и обозначения других величин: X_{β} остается ковариантом, а X_{α} и $\delta_{\alpha\beta}$ должны тогда в соответствии с (3.16) записываться как контравариантные величины X^{α} и $\delta^{\alpha\beta}$.

Связав X^α и X_β соотношением (3.16) как ковариантную и контравариантную величины, мы тем самым отдели $\delta^{\alpha\beta}$ роль метрического тензора; как видим, в данном случае он представлен единичной матрицей [ср. с (1.24)]. Из тензорного анализа известно, что такому метрическому тензору соответствуют прямоугольные координаты в пространстве [Победря, 1974]. Следовательно, статическая задача балансового планирования задается в прямоугольной системе координат пространства F , при метрическом тензоре $g^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta}$, т. е. единичной матрице.

Однако всегда ли геометрия потоков продуктов в экономике так проста? Когда мы строили мысленно потоки продуктов, обеспечивающие выполнение заданного плана, то на каждом этапе оказывалось, что X^α и X_β не равны друг другу [см. (3.6)—(3.8)]. Рассматривая ряд (3.8), можно видеть, что при вычислении очередного члена $m + 1$ валовой выпуск X^α на выходе отрасли α уже должен возрасти до величины

$$X_{m+1}^\alpha = X_m^\alpha + (a^{\alpha\beta})^{m+1} y^\alpha, \quad (3.17)$$

в то время как воздействие, валовой выпуск на входе α $(X_\beta)_m$ остается еще прежним (поскольку очередной член ряда $m + 2$ еще не вычислен). Поэтому в каждый такой момент вместо (3.16) имеем соотношение

$$X_{m+1}^\alpha = \delta^{\alpha\beta} (X_\beta)_m + (a^{\alpha\beta})^{m+1} y^\alpha, \quad (3.18)$$

где $m + 1$ означает степень, а не индекс. Учитывая, что

$$(X_\beta)_m = \sum_{\kappa=0}^m (a^{\alpha\beta})^{(\kappa)} y^\alpha, \quad (3.19)$$

выразим y^α и подставим в (3.18). Тогда получим зависимость каждого последующего члена ряда от предыдущего, т. е. формулу вычисления X_{m+1} по X_m . Она имеет вид

$$X_{m+1}^\alpha = \left[\delta^{\alpha\beta} + \frac{(a^{\alpha\beta})^{m+1}}{\sum_{\kappa=0}^m (a^{\alpha\beta})^\kappa} \right] (X_\beta)_m. \quad (3.20)$$

Сравнив с (3.16), видим, что выражение в скобках представляет собой метрический тензор $g^{\alpha\beta}$, который при вычислении каждого нового члена ряда (3.8) принимает вид

$$g^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta} + \frac{(a^{\alpha\beta})^{m+1}}{\sum_{\kappa=0}^m (a^{\alpha\beta})^\kappa} = \delta^{\alpha\beta} + \gamma^{\alpha\beta}. \quad (3.21)$$

Поскольку $||a^{\alpha\beta}|| < 1$, то при $m \rightarrow \infty$ дробное выражение стремится к нулю, т. е. в пределе получаем, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \gamma^{\alpha\beta} = 0. \quad (3.22)$$

Тогда, как и ранее,

$$g^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta}. \quad (3.23)$$

Характер изменения $g^{\alpha\beta}$ при этом показывает, что на каждом шаге вычисления X^α мы совершаем в нашем пространстве переход к криволинейным системам координат общего вида, в которых отличны от нуля даже многие недиагональные компоненты метрического тензора $g^{\alpha\beta}$. Согласно (3.21) отличны от нуля те компоненты метрического тензора, которые соответствуют поставкам, связывающим отрасли $\alpha\beta \neq 0$, т. е. компоненты метрического тензора заданы структурой экономической системы. Процесс перехода от исходных условий задания плана к установлению потоков продуктов с геометрической точки зрения похож, таким образом, на переходные процессы от начальных условий к стационарному режиму во вращающихся электрических машинах, которые мы рассматривали в гл. 1.

Получим теперь формулу преобразования для валового выпуска X^α , рассматриваемого как поток. Для этого снова рассмотрим стационарный случай, когда $g^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta}$. Подставим (3.16) в (3.15) и рассмотрим потоки продуктов в новой (штрихованной) системе отраслей

$$X^{\alpha'} = g^{\alpha'\beta'} X_\beta = g^{\alpha'\beta'} A_\beta^\beta, X_\beta = g^{\alpha'\beta'} A_\beta^\beta, g_{\alpha\beta} X^\alpha. \quad (3.24)$$

Учитывая свойство метрического тензора поднимать и опускать индексы, получим, что

$$g^{\alpha'\beta'} A_\beta^\beta g_{\alpha\beta} = A^{\alpha'\beta} g_{\alpha\beta} = A_{\alpha'}^\alpha. \quad (3.25)$$

Следовательно, формула преобразования X^α принимает вид

$$X^{\alpha'} = A_{\alpha'}^\alpha X^\alpha. \quad (3.26)$$

Как видим, эта формула дает для X^α закон преобразования, обратный закону преобразования X_β (3.15), что соответствует закону преобразования контравариантных компонент вектора. Таким образом, X_β имеет ковариантный закон преобразования, а X_α — контравариантный закон преобразования.

Аналогично предыдущему получим формулы преобразования для поставок $x^{\alpha\beta}$ и ресурсов $r^{k\alpha}$

$$x^{\alpha'\beta'} = a^{\alpha'\beta'} X_\beta = a^{\alpha'\beta'} A_\beta^\beta, X_\beta = a^{\alpha'\beta'} A_\beta^\beta, a_{\alpha\beta}^{-1} x^{\alpha\beta}, \quad (3.27)$$

$$r^{k'\alpha'} = b^{k'\alpha'} X_{\alpha'} = b^{k'\alpha'} A_{\alpha'}^\alpha, X_{\alpha'} = b^{k'\alpha'} A_{\alpha'}^\alpha, b_{k\alpha}^{-1} r^{k\alpha}. \quad (3.28)$$

Эти формулы преобразования не имеют тензорного характера, поскольку наряду с матрицей преобразования A^α в них входят также множителями $a^{\alpha'\beta'}$, $b^{k'\alpha'}$, $a_{\alpha\beta}^{-1}$, $b_{k\alpha}^{-1}$. Более того, эти преобразования вообще не образуют группы, поскольку, как показывают простые примеры, матрица коэффициентов прямых затрат $a^{\alpha\beta}$ может иметь определитель, равный нулю, и тогда $(a_{\alpha\beta})^{-1} = a^{\alpha\beta}$ не существует. Поэтому

му по изменению структуры, определяемому матрицей A_{α}^{α} , и поставкам $x^{\alpha\beta}$, нельзя определить поставок $x^{\alpha'\beta'}$ в новой системе. То же самое касается и потоков ресурсов.

Отсутствие тензорной формулы преобразования для ресурсов и поставок можно объяснить тем, что ни те, ни другие не определяют собой по отдельности всех потоков продуктов в системе отраслей. Полностью задать потоки продуктов в системе можно тремя способами:

1. Задать план выпуска финишного продукта y^{α} . Тогда, решая балансовую задачу, получим валовые выпуски, поставки и ресурсы.

2. Задать валовые выпуски X^{α} . Тогда по формуле (3.1) найдем поставки, а по формуле (3.4) — ресурсы.

3. Задать одновременно все поставки и ресурсы. Тогда X_{α} найдем из полученного дополнительного соотношения для потоков продуктов в системе (3.10).

Из этого последнего способа задания продуктов можно получить формулу преобразования тензорного вида для совокупности поставок и ресурсов

$$\sum_{\beta'} x^{\beta'\alpha'} + \sum_{k'} r^{k'\alpha'} = X_{\alpha'} = A_{\alpha'}^{\alpha} X_{\alpha} = A_{\alpha'}^{\alpha} \left(\sum_{\beta} x^{\beta\alpha} + \sum_k r^{k\alpha} \right). \quad (3.29)$$

Как видим, для приведения уравнений балансового планирования к тензорному виду оказалось необходимым использовать то самое соотношение — баланс потоков продуктов на входе отраслей, которое не потребовалось для расчета баланса прямым обращением матрицы $(I-A)$.

Все потоки продуктов преобразуются по контравариантному закону, кроме X_{α} — валового выпуска на входе отраслей, который преобразуется как ковариантный объект. Это соответствует роли этих величин в задаче баланса: X_{α} является воздействующей, вызывающей поток продукта величиной, в отличие от X^{α} , который сам является откликом, потоком продукта.

В совокупности уравнения (3.1), (3.2), (3.4) и (3.10) представляют тензорную форму уравнений балансового планирования. Их преобразования определяются соотношениями (3.15), (3.26) и (3.29). Построение тензорной формы уравнений позволяет перейти к следующему этапу — построению эквивалентной модели задачи баланса в виде электрической цепи.

3.4. ЭКВИВАЛЕНТНАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ БАЛАНСА ПРОДУКТОВ

Общая схема потоков продуктов в системе отраслей представлена на рис. 3.4 и 3.5. Аналогии между потоками продуктов и электрической цепью заключаются в том, что структура их состоит из одномерных элементов — ветвей, а протекающие процессы описываются

линейными уравнениями, причем и там, и там тип процессов один. Это позволяет надеяться на возможность построения эквивалентной модели в виде электрической цепи.

Схема потоков продуктов на рис. 3.5 по своей структуре уже напоминает структуру электрической цепи. Будем рассматривать эту структуру как цепь, ветвями которой являются отрасли, поставки и ресурсы. Воздействием для такой цепи является план, заданный на выходе отраслей, который логичнее всего отождествить с узловым током. Тогда рассматриваемая нами модель будет узловой цепью. Характеристиками ветвей, определяющих потоки продуктов в них, являются ко-

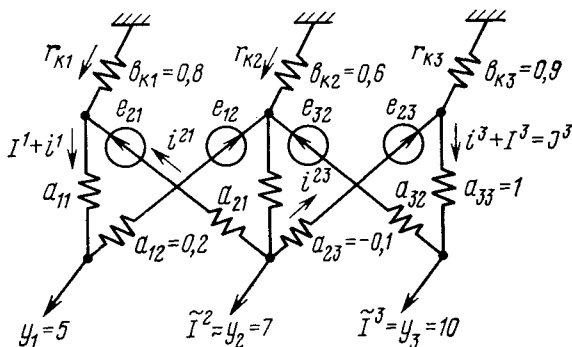


Рис. 3.6. Пример эквивалентной модели в виде электрической цепи для задачи балансового планирования в системе из трех отраслей

эффициенты прямых затрат, в узловой цепи их должны представлять проводимости. Таким образом, для ресурсов примем, что $Y^{k\alpha} = e^{k\alpha}$, для отраслей $Y^{\alpha\alpha} = 1 - a^{\alpha\alpha}$; для поставок $Y = a^{\alpha\beta}$. Если собственного потребления в отраслях нет, то $a^{\alpha\alpha} = 0$.

Ветви поставок идут от выхода отрасли-поставщика на вход отрасли-потребителя. Ресурсы в отрасль поступают извне в количестве, обусловленном соотношением (3.4). Поскольку они ограничены только значением X_α , то будем считать соответствующие им ветви заземленными. Финишному продукту y^α соответствует воздействующий узловой ток I^α . Вообще говоря, можно строить модель двойственным образом, тогда финишный продукт будет представлен источником напряжения, а коэффициенты прямых затрат — импедансами.

Схема модели балансового планирования в виде электрической цепи представлена на рис. 3.6. Помимо источников тока, на схеме изображены также источники напряжения, следовательно, цепь должна возбуждаться одновременно как источниками тока, так и напряжения. Необходимость использования контурных воздействий диктуется процессом построения потоков продуктов по заданному плану, который мы рассмотрели выше [см. (3.6)—(3.8)].

Дело в том, что если мы рассчитаем модель просто как узловую цепь, то напряжения и токи на ветвях не будут соответствовать потокам продуктов. Действительно, из схемы можно видеть, что при данном направлении воздействий узловых токов токи откликов в ветвях направлены в основном от заземления к выходам отраслей как по ветвям отраслей, так и ветвям поставок. Поскольку на выходе отраслей эти токи суммируются в ток \bar{I}^α , то сами токи в ветвях будут меньше токов \bar{I}^α . Получается, что план больше валового выпуска, что противоречит экономическому смыслу задачи.

Чтобы построить в цепи токи, которые бы представляли потоки продуктов, воспользуемся независимостью переменных в цепи при контурном и узловом возбуждении. Для этого используем процесс построения валовых выпусков, рассмотренный нами в предыдущем параграфе в соотношениях (3.6)—(3.9).

Сначала предположим, что в нашей цепи, помимо источников тока, имеются также источники напряжения, причем такие, что вызванные ими токи в ветвях, в сумме с узловыми токами, будут равны потокам продуктов на нулевом этапе расчета, т. е. когда только что задан план.

Чтобы не запутаться, введем обозначения для токов на нулевом этапе расчета:

Воздействующие токи	Узловые токи \bar{I}^α	Контурные токи
Токи отклика на ветвях:		
отраслей	I^α_0	i^α_0
поставок	$I^{\alpha\beta}_0$	$i^{\alpha\beta}_0$
ресурсов	$I^{k\beta}_0$	ik^α_0

Контурные напряжения будем обозначать, как и раньше, e , а узловые E с такими же индексами, как и токи. Все величины на ветвях, кроме того, снабдим индексами, показывающими номер этапа расчета (или, что то же самое, номер члена степенного ряда): 1, 2, ..., m и т. д. Например, узловые токи в поставках на втором этапе расчетов обозначим $I^{\alpha\beta}_2$.

Полные токи в ветвях, равные сумме контурных и узловых токов, обозначим соответственно I^α , $I^{\alpha\beta}$, $I^{k\alpha}$, а полные напряжения — как V_α , $V_{\alpha\beta}$, $V_{k\alpha}$.

Модель рассматриваем как неподвижную электрическую цепь, в которой нет магнитных и диэлектрических потоков. Возникает вопрос: можно ли так задать и расположить источники напряжения, чтобы они обеспечили требуемое нам распределение контурных токов? Поскольку задача о нахождении откликов на воздействия в цепи решается единственным образом, то любому распределению токов в ветвях цепи, в том числе и нужному для нас, соответствует набор источников

напряжения, который его обеспечивает. Другой вопрос — сколько должно быть таких источников и где их расположить? Предположим, что каждая отрасль обеспечивается одним ресурсом. Если отраслей n , то и ресурсов n . Обозначив число поставок l , получим полное число ветвей в цепи

$$N = n + n + l = 2n + l. \quad (3.30)$$

Из схемы на рис. 3.5 или 3.6 можно видеть, что в нашей цепи всего $2n + 1$ узлов (два узла каждой отрасли плюс один общий узел заземления), тогда пар узлов — $2n$. Из соотношения (2.1) определим теперь число контуров

$$m = 2n + l - 2n = l, \quad (3.31)$$

т. е. контуров столько, сколько ветвей поставок. Иначе можно сказать, что каждая поставка определяет собой контур. Расположив в каждой ветви-поставке по источнику напряжения, что и показано на рис. 3.6, и подбирая их значения, мы можем задавать в цепи требуемое распределение токов.

Чтобы наши контурные и узловые токи в сумме соответствовали потокам продуктов на нулевом этапе расчетов, они должны удовлетворять законам Кирхгофа для токов на входе и выходе отраслей

	На выходе	На входе	
Узловая цепь	$\tilde{I}^\alpha = I_0^\alpha + \sum_\beta I_0^{\beta\alpha}$	$I_0^\beta + \sum_\alpha I_0^{\alpha\beta} + I_0^{k\beta} = 0$	(3.32)

Контурная цепь	$i_0^\alpha = \sum_\beta i^{\alpha\beta} = 0$	$i_0^\beta = \sum_\alpha i^{\beta\alpha} - i^{k\alpha}$	(3.33)
----------------	---	---	--------

Для выполнения этих соотношений необходимо, чтобы источники напряжения были не произвольные, как до сих пор, а такие, чтобы вызываемые ими токи имели следующие значения:

1. Токи i_0^α отраслей должны дополнять узловые токи I_0^α так, чтобы в сумме полный ток был равен воздействию в узловой цепи — финишному продукту

$$i_0^\alpha + I_0^\alpha = J_0^\alpha = \tilde{I}^\alpha. \quad (3.34)$$

2. Токи в ветвях поставок $i_0^{\alpha\beta}$ равны и противоположны узловым токам $I_0^{\alpha\beta}$; суммарный ток в поставках

$$J_0^{\alpha\beta} = i_0^{\alpha\beta} + I_0^{\alpha\beta} = 0. \quad (3.35)$$

3. Контурные токи в ресурсах определяются токами i_0^α и $i_0^{\alpha\beta}$ по закону Кирхгофа для входов отраслей. На выходе отраслей этот закон

соблюдается, поскольку увеличение контурных токов i^α равно их сумме в поставках:

$$i_0^\alpha = \tilde{I}^\alpha - I_0^\alpha = \sum_{\beta} I_0^{\alpha\beta}. \quad (3.36)$$

Построенные таким образом суммарные полные токи в ветвях соответствуют исходному нулевому этапу расчета баланса — первому члену ряда (3.8) — и равны в отраслях, поставках и ресурсах соответственно

$$J_0^\alpha = I_0^\alpha + i_0^\alpha = \tilde{I}^\alpha = y_\alpha, \quad (3.37)$$

$$J_0^{\alpha\beta} = I_0^{\alpha\beta} + i_0^{\alpha\beta} = 0, \quad (3.38)$$

$$J^{\alpha\beta} = J_0^{\alpha\beta} = \tilde{I}^\alpha. \quad (3.39)$$

Поскольку, как уже говорилось, каждому распределению источников напряжения соответствует единственное распределение токов в ветвях цепи, то можно утверждать и обратное — каждому распределению контурных токов должно соответствовать некоторое распределение источников напряжения. Значения этих источников напряжения нас пока не интересуют, но мы можем их определить на каждом этапе вычислений. Воспользуемся этим обстоятельством и будем называть далее такие значения контурных токов, чтобы полные токи $J^\alpha = I^\alpha + i^\alpha$, $J^{\alpha\beta} = i^{\alpha\beta} + I^{\alpha\beta}$, $J^{\alpha\beta} = i^{\alpha\beta} + I^{\alpha\beta}$ давали значения величин потоков продуктов в системе отраслей X_α , $r^{\alpha\beta}$ и $x^{\alpha\beta}$ на каждом этапе вычислений, соответствующих вычислению очередного члена ряда (3.8). Этот процесс мы выполним мысленно и запишем в итоге формулы расчета полных токов в отраслях, поставках и ресурсах, которые были бы равны численно соответствующим потокам продуктов. При этом задавать контурные токи будем в ветвях отраслей и поставок, а токи в ресурсах будем вычислять по закону Кирхгофа для входов отраслей и сопоставлять с уравнением (3.4). Выполнение этого соотношения будет свидетельствовать о правильности нашего построения.

Итак, перейдем к вычислению токов для следующего члена ряда (3.8). Чтобы получить распределение полных токов, соответствующее сумме двух первых членов ряда, предположим:

1. Источники напряжения изменились настолько, что соответствующее изменение токов в поставках от $i_0^{\alpha\beta}$ до $\Delta i_1^{\alpha\beta} = i_1^{\alpha\beta} - i_0^{\alpha\beta}$ обеспечивало валовой выпуск $i_0^\alpha = X_0^\alpha$ для обеспечения поставок, равный

$$\Delta i_1^{\alpha\beta} = Y^{\alpha\beta} (i_0^\beta + I_0^\beta) = Y^{\alpha\beta} \tilde{I}^\beta \rightarrow a^{\alpha\beta} y_\beta. \quad (3.40)$$

Полные токи в ветвях-поставках при этом станут равны

$$J_1^{\alpha\beta} = \Delta i_1^{\alpha\beta} + i_0^{\alpha\beta} + I_0^{\alpha\beta} = \Delta i_1^{\alpha\beta}. \quad (3.41)$$

2. Контурные токи в ветвях-отраслях увеличатся на

$$\sum_{\beta} (i_1^{\alpha\beta} - i_0^{\alpha\beta}) = \Delta i_1^{\alpha}. \quad (3.42)$$

Тогда полные токи в отраслях на первом этапе равны соответствующим валовым выпускам

$$J_1^{\alpha} = \tilde{I}^{\alpha} + \sum_{\beta} (i_1^{\alpha\beta} - i_0^{\alpha\beta}) = \tilde{I}^{\alpha} + \sum_{\beta} \tilde{I}^{\beta} Y^{\alpha\beta}. \quad (3.43)$$

3. Токи в ресурсах изменятся в соответствии с законом Кирхгофа на входе отраслей (3.32)—(3.33)

$$J_1^{k\alpha} = J_1^{\alpha} - \sum_{\beta} J_1^{\beta\alpha}. \quad (3.44)$$

Для проверки подставим сюда (3.43) и (3.41), заменим $\sum_{\beta} J_1^{\beta\alpha}$ на $\sum_{\gamma} J_1^{\gamma\alpha}$, чтобы отличить поставки γ , входящие в отрасль α , от поставок, идущих из α в другие отрасли β . Тогда

$$J_1^{k\alpha} = J_1^{\alpha} - J_1^{\alpha} \sum_{\gamma} Y^{\gamma\alpha} = J_1^{\alpha} Y^{k\alpha}. \quad (3.45)$$

Полученное соотношение соответствует (3.4), откуда заключаем, что на первом этапе вычислений модель правильно представляет потоки продуктов в системе отраслей, описываемой уравнениями баланса.

Перейдем ко второму этапу расчета. Повторим последовательно пункты 1—3 первого этапа, принимая за исходные данные токи J_1^{α} , $J_1^{\alpha\beta}$ и $J_1^{k\alpha}$; тогда получим результат следующего этапа вычислений:

1. Токи в поставках

$$J_2^{\alpha\beta} = J_1^{\alpha\beta} + (J_1^{\beta} - J_0^{\beta}) Y^{\alpha\beta} = J_1^{\alpha\beta} + \tilde{I}^{\beta} (Y^{\alpha\beta}). \quad (3.46)$$

2. Ток J_1^{α} увеличится на

$$\sum_{\beta} (J_2^{\alpha\beta} - J_1^{\alpha\beta}) \text{— это ток } J_2^{\alpha} \\ J_2^{\alpha} = J_1^{\alpha} + \sum_{\beta} \tilde{I}^{\beta} (Y^{\alpha\beta})^2 = \tilde{I}^{\alpha} + \sum_{\beta} \tilde{I}^{\beta} (Y^{\alpha\beta} + (Y^{\alpha\beta})^2). \quad (3.47)$$

3. Токи в ресурсах, в соответствии с (3.33), станут

$$J_2^{k\alpha} = J_1^{k\alpha} + \sum_{\gamma} J_2^{\gamma\alpha} = J_2^{\alpha} Y^{k\alpha}. \quad (3.48)$$

Продолжая этот процесс столько раз, сколько членов ряда требуется для обеспечения требуемой точности вычислений, мы получим

для t этапа расчета следующие формулы для полных токов в ветвях отраслей, поставок и ресурсов:

$$J_t^\alpha = \tilde{I}^\alpha + \sum_{\beta} \tilde{I}^\beta \sum_{\xi=1}^t (Y^{\alpha\beta})^\xi, \quad (3.49)$$

$$J_t^{\alpha\beta} = \tilde{I}^\beta \sum_{\xi=1}^t (Y^{\alpha\beta})^\xi, \quad (3.50)$$

$$J_t^{k\alpha} = J_t^\alpha Y^{k\alpha}. \quad (3.51)$$

Учитывая сказанное выше относительно проверки правильности построения токов, можно сказать, что построенные комбинации контурных и узловых токов в модели балансового планирования с любой требуемой точностью представляют потоки продуктов в системе отраслей.

Таким образом, мы построили модель для задачи балансового планирования. Оказалось, что для представления потоков продуктов нам достаточно использовать понятия электрических токов при контурном и узловом возбуждении. Вычисляя их путем расчета полученных цепей, мы получим в результате расчет задачи балансового планирования. Если экономическая система слишком велика для расчета ее как единого целого или время расчета превышает потребности планирования и управления в режиме реального времени, то полученная модель может использоваться в соответствии с этапом 4 тензорной технологии для расчета баланса продуктов по частям. Для этого модель разделяется на части, на подсистемы требуемого размера, и связывающую их цепь пересечений. Все эти $n + 1$ подсистем рассчитываются по отдельности, как если бы других не существовало. Для цепи пересечений в качестве воздействий используются результаты расчета подсистем. Затем строится алгоритм взаимного учета воздействий между подсистемами и цепью пересечений с целью получения расчета полной системы. Нет необходимости строить модель физически и расчленять на части. Все эти действия можно проинтерпретировать аналитическими действиями с матрицами, для которых и разрабатывается соответствующее алгоритмическое, программное, информационное обеспечения.

Такой программный комплекс расчета баланса по частям реализован автором. Проведенные численные эксперименты по определению его характеристик показали достаточно высокую эффективность метода диакоптики по сравнению с прямыми расчетами полной системы. Экстраполяция на расчет экономических систем реальных размеров показывает, что время расчета при среднем числе связей на отрасль, равном четырем, для системы из нескольких тысяч отраслей должно сокращаться в десятки раз, что обеспечило бы значительное повышение эффективности управления.

Наконец, рассмотрим пятый этап нашей технологической цепочки. Обратим внимание, что для представления в модели потоков продуктов оказалось достаточно токов. Напряжения в модели: источники напряжения, которые мы до сих пор не вычисляли, напряжения на ветвях, обусловленные действующими узловыми токами, финишным продуктом; напряжения на ветвях, соответствующие протекающим контурным токам, наконец, суммарные напряжения на ветвях — остались в нашей модели понятиями, свободными от экономической интерпретации. В соответствии с рассмотренной в § 3.1 технологией мы должны попытаться дать экономическую интерпретацию этим понятиям в надежде, что это даст более ясную картину процессов в системе отраслей, обобщение экономических задач, решаемых методом баланса, повысит эффективность расчетов.

Возможная экономическая интерпретация напряжений определяется их ролью в контурной цепи как воздействий, вызывающих протекание токов. В экономике роль воздействий, по-видимому, играют финансы, распределяемые отраслям для обеспечения выпуска ими планового продукта. Представляется естественным связать электрические воздействия — напряжения — и экономические воздействия — финансы. Это нельзя сделать просто и прямолинейно. Как мы видели, напряжения могут играть также и роль откликов. Кроме того, понятие финансов в экономике не менее сложно, чем понятие напряжения в электротехнике. Вспомним, например, трактовку напряжения как ковариантных проекций вектора в базисе данной цепи и как контравариантных проекций в базисе двойственной цепи. Необходимо учитывать, конечно, все многочисленные функции и проявления денег.

Поэтому можно говорить только об установлении пропорций распределения финансов среди отраслей в соответствии с вычисленными значениями напряжений на ветвях модели. Для установления абсолютных значений воздействий необходимо выбрать единицу измерения стоимости. Это можно сделать как с точки зрения экономической путем выбора одной денежной единицы в качестве эталона, так и физической, принимая, например, за единицу измерения энерго- или трудовых затрат на производство какого-либо эталонного продукта, скажем золота, и сопоставляя их с получаемой или ожидаемой выгодой от использования данного продукта, выраженной в тех же единицах. В экономике имеются попытки выработать единый критерий сравнения для разнородных продуктов помимо денег [Подолинский, 1880].

Обратим внимание, что рассчитанные таким образом пропорции экономических воздействий, чему бы они ни соответствовали, обусловлены только заданным планом выпуска продуктов и экономической структурой, определяемой коэффициентами прямых затрат. Следовательно, полученные пропорции являются дополнительной понятийной информацией об экономической системе, которую по заданному плану выпуска продукции генерирует тензорная модель балансового планирования. Эти новые понятия позволяют составить в дополнение к

материальному продуктовому объединенный материально-финансовый баланс экономической системы.

Объединенный материально-финансовый баланс играет в экономике все более важную роль. Он позволяет получить много новых и важных данных о движении материальных и денежных потоков в народном хозяйстве, показать не только процесс создания и использования национального дохода, но и процесс его распределения и перераспределения. Благодаря построенной модели расчет такого баланса может использоваться для установления отдаленных региональных и временных последствий внесения тех или иных изменений как в материальном производстве, так и в сфере финансов [Коссов, 1966].

Таковы основные особенности применения тензорной методологии для исследования и расчета неэлектрической сложной системы — задачи балансового планирования экономической системы.

3.5. ПОЛИЭДРАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ ИЛИ КАК СОЗДАТЬ САМООРГАНИЗУЮЩИЙСЯ ВОЛНОВОЙ АВТОМАТ

Всякую ли систему можно представить моделью в виде сети из одномерных ветвей (электрической цепи) и рассчитывать, исследовать, проектировать с ее помощью?

На этот вопрос трудно ответить односложно. С одной стороны, довольно очевидно, что нет, не любую: в системах может протекать не один, а несколько процессов, а пути их распространения могут быть не одномерными линиями, как для электрического тока, а двумерными плоскостями или даже объемами.

Взять хотя бы электромеханические устройства — вращающиеся электрические машины. Здесь протекают потоки энергии нескольких видов: электрические, магнитные, механические. Можно ли их представить одной неподвижной сетью? Ведь механического движения в сети нет, а магнитный поток распространяется (и измеряется) по двумерным поверхностям (пропорционально их площади), а не по одномерным ветвям. Кроме того, заряды, создающие электростатическое поле, можно рассматривать как точки. Электрический поток, заданный, скажем, зарядами на пластинах конденсатора, также пропорционален площади. Линии электрического потока, как и магнитного, не образуют линейного графа, характерного для структуры электрической цепи.

Как магнитные, так и электрические (электростатические) потоки могут образовывать сети, структура которых подчиняется законам, аналогичным законам Кирхгофа, но элементами этих сетей будут не одномерные ветви, как для токов, а двумерные поверхности. Отдельные заряды также можно рассматривать как «сеть», образуемую нульмерными элементами — точками.

Итак, уже электромеханические устройства дают пример структур, более сложных, многомерных, чем рассмотренные сети из одномерных

ветвей. Нульмерные, одномерные и двумерные сети этих устройств связаны друг с другом в единую структуру, в элементах которой протекают процессы, описываемые уравнениями электромагнитного поля.

С другой стороны, как мы уже видели в § 1.5, уравнения электрических машин в тензорной форме имеют такой же вид, как и уравнение закона Ома для электрических цепей. Действительно, Кроном были построены эквивалентные модели в виде цепей для вращающихся электрических машин [Kron, 1951]. Следовательно, рассмотренные нами одномерные сети могут в какой-то степени использоваться для моделирования многомерных систем с различными типами протекающих в них процессов.

Вспомним, однако, что существуют и более сложные физические, химические процессы, процессы в экономических системах, социальные, наконец, биологические процессы. В какой степени можно использовать сетевые модели для их исследования? Какие необходимо сделать обобщения сетей, чтобы максимально использовать возможности тензорной методологии для исследования сложных систем различной природы?

В § 3.1 уже говорилось о том, что эквивалентные модели в виде электрических цепей были построены для различных уравнений математической физики — Максвелла, Шредингера, сжимаемой и несжимаемой жидкости и др. Были построены также модели других дифференциальных уравнений в частных производных [Kron, 1948]. Все эти модели представляли, как отмечалось, параметры уравнений, значения зависимых и независимых переменных не во всем непрерывном пространстве, а в отдельных точках — узлах дискретной «решетки», расположенной в пространстве.

Одна такая «ячейка» пространства для модели уравнений Максвелла представлена на рис. 3.7. Токи и напряжения этой цепи дают значения характеристик электромагнитного поля для точек пространства, расположенных в вершинах куба. На рис. 3.7 эти вершины расположены внутри шарообразных комбинаций проводников [Balasubramanian, 1970]. Эти проводники соединены ветвями с комплексными сопротивлениями (импедансами). Форма ветвей и значения связанных с ними импедансов зависят от природы моделируемых дифференциальных уравнений. В различных моделях такого типа токи и напряжения могут представлять не только зависимые переменные в уравнениях, но также их первые, а иногда и вторые производные — как разности значений в соседних точках. Таким образом, эти модели основаны на обычных методах численного решения дифференциальных уравнений в частных производных.

В соответствии с этим непрерывная структура физической системы, описываемая рассматриваемыми уравнениями, заменяется совокупностью точек, однородно расположенных в пространстве на расстояниях $\Delta x_{(1)}$, $\Delta x_{(2)}$, ... Этим точкам соответствуют независимые $x_{(1)}$, $x_{(2)}$, $x_{(3)}$ и зависимые y_α переменные, представляющие собой значения

уравнений в этих точках, а также последовательность разностей (первых Δy_α , вторых $\Delta^2 y_\alpha$ и т. д.). Для такой дискретной структуры составляют систему алгебраических уравнений (линейных или нелинейных) и решают ее.

Моделей в виде электрических цепей было достаточно для представления многих уравнений в частных производных первого и второго

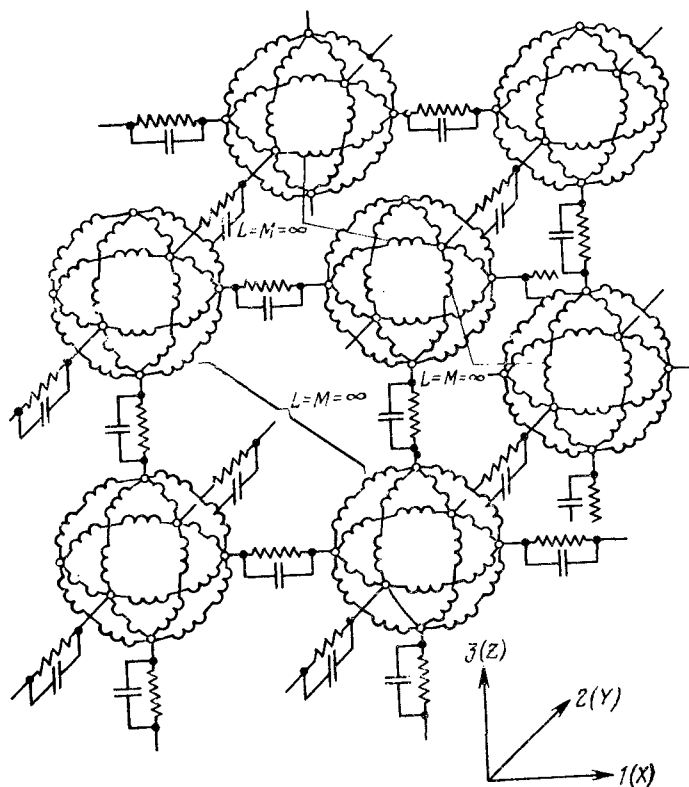


Рис. 3.7. Эквивалентная модель уравнений электромагнитного поля Максвелла в виде электрической цепи для дискретной ячейки пространства

порядка. Однако, если имеется совокупность точек (соответствующих, скажем, экспериментальным данным), которые расположены в пространстве неоднородно, и эти точки представляют собой значения неизвестной функции, обладающей производными более высокого порядка, то для определения этой функции модели в виде одномерной цепи уже недостаточно.

Оказалось, что восстановить функцию вместе с производными высших порядков по экспериментальным данным можно в том случае, когда вместе с одномерными электрическими цепями рассматриваются одновременно сети, состоящие из многомерных элементов.

С физической точки зрения эти сети строятся так же, как одномерные, когда выбранные в пространстве точки соединялись ветвями с импедансами. Теперь в дополнение к ветвям рассматриваются ограниченные этими ветвями плоскости и образуемые ими структуры. Сами плоскости ограничивают объемы и рассматриваются структуры, составленные из этих объемов. При этом, если рассматриваются две системы независимых переменных $x_{(1)}^\alpha$, и $x_{(2)}^\alpha$, то две точки могут определять расстояние (ветвь), а три точки — площадь, но объемы определить нельзя. При трех системах независимых переменных $x_{(1)}^\alpha$, $x_{(2)}^\alpha$ и $x_{(3)}^\alpha$, можно ввести линии, плоскости (треугольники) и кубы (тетраэдры) при помощи двух, трех или четырех соседних точек (рис. 1.8).

Если же даны k независимых переменных $x_{(s)}^\alpha$ и по каждому измерению имеется n значений, то они будут рассматриваться как n точек в пространстве k измерений, в котором можно определить многомерные элементы вплоть до k -мерных, и рассматривать образуемые ими структуры многомерных сетей.

В сети каждого измерения строится система отсчета. Например, каждая точка соединяется с соседними точками, до которых кратчайшие расстояния; получается линейная система отсчета, такая, что ветви, выходящие из каждой точки, охватывают полное k -мерное пространство.

Система отсчета для плоскостей строится с помощью совокупностей трех точек (треугольников), охватывающих минимальные площади и заполняющих собой пространство. Затем k -мерное пространство заполняется при помощи тетраэдров, имеющих минимальные объемы и т. д. При этом способ выбора систем отсчета должен быть различным и определяться потребностями задачи.

После этого вводятся элементы сети: квадраты расстояний, площадей, объемов определяются как импедансы (или проницаемости, магнитные или диэлектрические), связанные с каждым элементом сети. В такой взаимосоединенной многомерной структуре (называемой «полиэдр») каждая четномерная сеть считается построенной из магнитного вещества, а каждая нечетномерная из диэлектрического вещества [Kron, 1958, 11].

При помощи k независимых переменных можно построить их разности k -го порядка и определить производные k -го порядка. Вся полиэдральная сеть уже рассматривается как электромагнитная, а не электрическая и возбуждается электромагнитными волнами, а не обычными источниками тока и напряжения. Например, предполагается, что зависимые переменные y_α представлены магнитными полюсами, которые производят B_0 линий магнитного потока, расположенных в соот-

ветствующих точках. Поскольку линии потока считаются синусоидально изменяющимися во времени, то y_α представляют также генерируемые потенциалы $y_\alpha = B_0 = dB/dt$, которые возникают на каждой узловой точке. Следовательно, на концах каждой ветви (узловых парах) возникает разность потенциалов $E_1 = \text{div } B_0$ и т. д. Эти величины возбуждают далее, в соответствии с уравнениями Максвелла, распространение по сети электромагнитной волны. При этом в каждой сети накапливается избыток электрических зарядов или магнитных полюсов. Все это время полная запасенная энергия в каждой сети равна сумме квадратов соответствующих разделенных разностей, определяющих производные соответствующих порядков.

Преимущество такой модели в том, что она более полно представляет физическую картину процесса, происходящего в материальном блоке $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, которую математики устанавливают, прежде чем переходить к пределу для получения дифференциальных уравнений. Кроме того, поскольку модель открывает доступ к внутренним силам связей (напряжениям, деформациям), то появляется возможность более широкого применения диакоптики для расчета по частям сложных систем, представленных такими моделями.

Понятия и соотношения, которые возникают при построении структуры многомерных (полиэдральных) сетей, с математической точки зрения описываются средствами комбинаторной топологии. Эта ветвь математики возникла как развитие и обобщение соотношений в структуре электрической цепи, известных нам как законы Кирхгофа [Kirchhoff, 1847]. Основы комбинаторной топологии, как самостоятельной математической науки, были заложены А. Пуанкаре в конце прошлого века. Наиболее удобную для прикладных целей форму этим методам придал О. Веблен, на работы которого опирался Г. Крон.

Основными в комбинаторной топологии являются понятия симплекса, комплекса, и полиэдра. С этими понятиями мы по существу уже имели дело в гл. 2 при анализе структуры электрической цепи. Понятие симплекса О. Веблен определял следующим образом:

«В евклидовом пространстве будем предполагать, что точки коллинеарны и между каждыми различными точками существует сегмент или одномерный симплекс, концы или вершины которого суть заданные точки. Концы не рассматриваются как точки сегмента» [Veblen, 1931]. Точки, концы одномерного симплекса (или 1-симплекса) определяются как 0-симплексы, часть плоскости, ограниченная 1-симплексами, определяется как 2-симплекс, объем — как 3-симплекс и т. д. В каждом случае границы симплекса ему не принадлежат. Все эти симплексы, каждый из которых может рассматриваться как пространство соответствующей размерности, отмечены на рис. 3.8.

Совокупность симплексов вместе с их границами, т. е. симплексами меньших размерностей, образует комплекс. Таким образом, сегмент — 1-симплекс вместе с концами — 0-симплексами образует 1-комплекс. Тетраэдр представляет собой 3-комплекс, состоящий из одного 3-сим-

плекса, четырех 2-симплексов (треугольников), шести 1-симплексов (отрезков) и четырех 0-симплексов (точек).

Вся совокупность точек, принадлежащих симплексам комплекса, называется полиэдром. По-разному разбивая один и тот же полиэдр на симплексы, получим разные комплексы. Примером такого разбиения является, скажем, составление разных структур сетей из одного и того же набора ветвей. Совокупность всех ветвей есть полиэдр, а каждое их частное соединение — комплекс. Таким образом, электрическая цепь соответствует одномерному полиэдру. При возбуждении

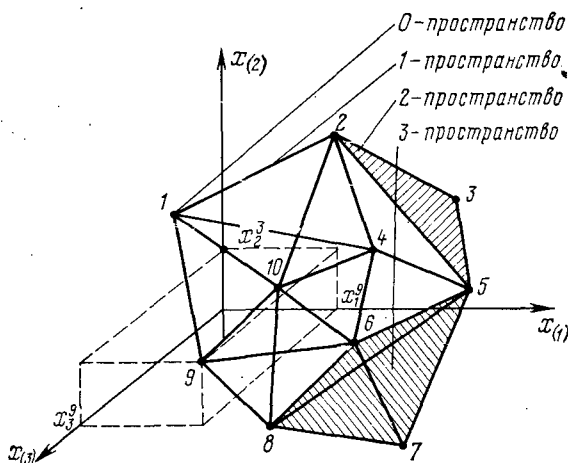


Рис. 3.8. Полиэдральная структура для десяти экспериментальных точек ($n=10$) в пространстве трех независимых переменных ($k=3$)

токами и напряжениями эта, уже рассмотренная нами, цепь и является простейшей полиэдральной сетью.

С точки зрения комбинаторной топологии соотношения двойственности в электрической цепи представляются более многообразными, чем ранее рассмотренные. Например, в n -мерном пространстве двойственным p -мерному симплексу оказывается $(n-p)$ -мерный симплекс, дополняющий его до n -мерного элемента пространства. Таким образом, p - и $(n-p)$ -симплексы в совокупности образуют n -мерный симплекс. Все соотношения, теоремы, существующие для p -симплексов, справедливы и для $(n-p)$ -симплексов с соответствующей заменой терминологии, как это уже обсуждалось в гл. 2.

В отношении электрической цепи это означает, что для каждой 1-ветви в трехмерном пространстве существует двойственная $(n-1) = 3-1 = 2$ -плоскость (2-симплекс). Что означает такая двойствен-

ность? Дело в том, что структура (граф) соединенных ветвей образует только невозбужденную «мертвую» сеть. При возбуждении через эту структуру начинают распространяться потоки электромагнитной энергии. Если рассматривать только электрическую часть потока, то помимо сети токов, совпадающей со структурой «мертвой» сети из 1-симплексов ветвей, в которых протекают эти токи, мы должны рассматривать также двойственную сеть из 2-симплексов — плоскостей, которые соответствуют эквипотенциальным поверхностям напряжений, расположенных ортогонально ветвям в окружающем сеть пространстве. Такая же картина получается по магнитной и диэлектрической составляющим. Аналогичные явления должны иметь место, конечно, и для двойственных α -сетей, рассмотренных в гл. 2. Таким образом, в возбужденной 1-сети все пространство вокруг нее оказывается заполненным взаимосвязанной структурой многомерных сетей, представляющих потоки электромагнитной энергии.

Если рассматривать теперь возбуждение последовательности многомерных сетей, составляющих полиэдр, то в каждой «мертвой» p -сети должна возникать «живая» структура, состоящая из взаимосвязанных сетей p -мерных потоков и $(n - p)$ -мерных обобщенных напряжений. Такая последовательность многомерных сетей, взаимодействующих также между собой и образующих наложенную на «мертвой», невозбужденный полиэдр «живую» структуру полиэдра потоков и двойственного полиэдра «напряжений», и представляет собой то, что Крон называл полиэдральной сетью.

Такие многомерные конструкции могут использоваться для представления и исследования тех явлений и систем, для которых возможностей одномерных сетей оказывается недостаточно.

При этом в сети любой размерности должны выполняться обобщенные законы Ома и Кирхгофа. «... Нет никакой необходимости развигивать новую теорию каждой p -сети. Двойственная $(n - p)$ -сеть имеет такую же структуру и уравнения, как и первичная p -сеть, что уже отмечалось для частного случая ($p = 1$)» [Крон, 1978, с. 33]. Следовательно, для каждой многомерной сети можно построить модели в виде 1-сетей, как это делалось для 2-сетей — электрических машин, что и отражено на рис. 1.2 линиями, связывающими полиэдральные сети с одномерными сетями.

Для возбуждения многомерных сетей электромагнитных волн уже недостаточно. Крон писал, что необходимо «погрузить» полиэдральную сеть в виде полиэдра и двойственного ему полиэдра в неподвижную или движущуюся плазму. Полученная таким образом самосогласованная структура, электромагнитные параметры которой дополнены механическими, термодинамическими и другими, может возбуждаться не только электромагнитными, но также и более общими волнами — магнитогидродинамическими, ионными, химическими, биологическими и т.д. При этом полиэдральная сеть проявляет способности к само-

организации. Такой «самоорганизующийся волновой автомат» использовался Кроном в качестве многомерного пространственного фильтра для построения многомерных функций распределения, аппроксимирующих экспериментальные данные. Свойства самоорганизации волнового автомата демонстрировались расчетом численных примеров, опубликованных Кроном [Kron, 1958]. Некоторые свойства полиэдральных сетей были подтверждены английским профессором Линном и его сотрудниками, которые привели расчеты численных примеров в статье «Волновой автомат Крона» [Physical structure, 1974, с. 131—142], но они не касались свойств самоорганизации. В этой статье написано, что: «В течение десятилетия ... Г. Крон разработал и применял самоорганизующийся электромагнитный полиэдральный волновой автомат. Он опубликовал результаты, полученные с помощью этой многомерной сетевой модели для случая проведения поверхностей по дискретным данным, ... решения нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, теории интегрирования, адаптивного управления, исследования кристаллов и моделирования некоторых самоадаптивных особенностей функционирования мозга ...».

Крон никогда не опубликовал подробностей метода приведения полиэдра к самоорганизации, хотя опубликованные им результаты показывают, что в этом состоянии он обладает некоторыми замечательными свойствами ...». В другой книге Линна и его сотрудников [Valasubramanian, 1970], приводятся слова Крона о возможности применения полиэдральных сетей для построения нейроноподобных сетей, проявляющих свойства самоадаптации к внешним воздействиям и могущих служить основой создания «искусственного мозга».

Мы не имеем возможности подробно останавливаться здесь на этом направлении, где сделаны пока только первые, хотя и многообещающие шаги, проведены первые опыты. Многое здесь представляется неясным. Сам Крон не скрывал, что «Многие из утверждений автора являются скорее надеждами, чем доказанными фактами ...» [Крон Г., 1972, с. 50]. Однако было бы неправильным оставлять это направление без внимания.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой небольшой книге мы лишь коснулись малоизлученной области применения тензорного подхода к разработке теории сложных систем. Этот подход представляет собой попытку объединения на инженерном уровне двух научных направлений, связанных с изучением процессов и структуры, уравнений и графов, разделенных в рамках непрерывных и дискретных методов, в единый аппарат исследования и расчета сложных систем.

Необходимость и важность такого объединенного подхода к изучению систем различной природы возрастает с увеличением сложности систем.

Мы проследили только одну, наиболее простую «технологическую цепочку» применения тензорной методологии в теории систем. Для этого были сформулированы общие идеи тензорного подхода, основные положения и понятия тензорного анализа в математике. Затем мы проследили проникновение тензоров в технические расчеты на примере анализа электрических машин.

Для применения тензорной методологии к исследованию неэлектрических систем оказалось необходимо разработать тензорный анализ и метод расчета одной из систем, выбираемой в качестве эталона для представления других систем данного класса. В качестве теории такой системы мы рассмотрели тензорный анализ электрических цепей. Эта система — цепь — используется в качестве эталона для сравнения, моделирования по аналогии других систем, сходных с нею.

Затем мы применили эту эталонную систему для представления и моделирования конкретной предметной области — экономической задачи балансового планирования.

Эта «технологическая цепочка» привела нас от геометрического пространства к пространству-структуре электрической цепи и, наконец, к пространству потоков продуктов. Главная идея тензорной методологии состоит в том, что существует единство, основанное на геометрических, структурных аналогиях и аналогиях между протекающими процессами для различных систем. Единство, позволяющее рассматривать их как различные конкретные проявления некоторой абстрактной системы. Это позволяет, в свою очередь, получать результаты расчета исследования для любого из этих проявлений систем путем преобразования уже полученных результатов для некоторой наиболее простой, эталонной системы.

Реализовав эту цепочку, мы получили одно из наиболее простых проявлений тензорной методологии. Чтобы сосредоточиться на этом, пришлось практически оставить в стороне многие важные в теоретическом и научно-техническом отношении области — расчет сложных систем по частям (диагностику), обобщение понятия эталонной системы на многомерные (полиэдральные) сети, элементами которых являются не одномерные ветви, а плоскости, объемы, многомерные элементы со сложными волновыми видами возбуждений, а также применение этих сетей к расчету многомерных, многокритериальных и нелинейных задач. Лишь скороговоркой мы пробежали и по тензорам в электромеханике для расчета электрических машин, которые фактически представляют собой двумерные полиэдральные сети.

Зато удалось построить группу преобразований структуры электрических цепей, при которых сохраняется поток энергии через эту структуру, характеризуемый мощностью, что дает нам надежную теоретическую основу для построения дальнейших обобщений, о которых говорилось выше.

Наконец, применяя тензорный же подход к самой тензорной методологии, автор позволит себе считать рассмотренную в этой книге про-

цедуру применения ее как эталон, простейшую цепочку, простейшее проявление тензора под названием «тензорная методология», «молекулу» ее «вещества». Возможные обобщения для более сложных многомерных, нелинейных систем, о которых мы упоминали, можно рассматривать как более сложные проявления такого обобщенного понятия, как тензорный подход к познанию, изучению, преобразованию реального мира.

Анализируя, используя, развивая то, что уже сделано в этой области, мы должны построить «группу преобразования» от простейшего примера применения тензорной методологии, вроде рассмотренного в этой книге, к ее более сложным проявлениям и применениям в науке и технике.

Дело осталось за немногим — за вами, читатель! Автор уверен, что в мире тензоров нас ждут еще многие открытия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Адкинс Б. Общая теория электрических машин: Пер. с англ. — Л.: Энергоиздат, 1960. — 180 с.

Афанасьев В. Г. Общество: системность, познание и управление. — М.: Политиздат, 1981. — 432 с.

Бартини Р. О., Кузнецов П. Г. Множественность геометрий и множественность физик. — В кн.: Моделирование динамических систем. — Брянск, 1974, с. 18—29.

Берендеев А. В. О работах Крона по применению тензорного исчисления в электротехнике. — Электричество, 1950, № 12, с. 78—79.

Вейль Г. О философии математики: Пер. с англ. — М.: Гостехиздат, 1934, с. 55—56.

Веников В. А., Ионкин П. А., Петров Г. Н., Копылов И. П. Габриэль Крон. — Электричество, 1969, № 1, с. 92—93.

Веников В. А., Веников Г. В. Теория подобия и моделирования. — 3-е изд. — М.: Высшая школа, 1984. — 439 с.

Глаголев Н. А. Проективная геометрия. — М.: Высшая школа, 1963. — 344 с.

Кузнецов П. Г. Искусственный интеллект и разум человеческой популяции. — В кн.: Е. А. Александров. Основы теории эвристических решений. — М.: Сов. радио, 1975, с. 212—248.

Корн Г., Корн Т. Справочник по математике: Пер. с англ./Под ред. И. Г. Арамоновича. — М.: Наука, 1977. — 832 с.

Коссов В. В. Межотраслевой баланс. — М.: Экономика, 1966. — 224 с.

Крон Г. Применение тензорного анализа в электротехнике: Пер. с англ./Под ред. П. В. Мееровича. — М.: Гостехиздат, 1955. — 250 с.

Крон Г. Исследование сложных систем по частям — диакоптика: Пер. с англ./Под ред. А. В. Баранова. — М.: Наука, 1972. — 544 с.

Крон Г. Тензорный анализ сетей: Пер. с англ./Под ред. Л. Т. Кузина, П. Г. Кузнецова. — М.: Сов. радио, 1978. — 720 с.

Кузина И. В., Петров А. Е. О тензорных методах построения языка базы данных. — В кн.: Банки данных для принятия решений. — М.: Знание, 1976, с. 59—67.

Кузин Л. Т., Кузнецов П. Г., Петров А. Е. Тензорный анализ сетей Г. Крона и его роль в проектировании систем. — В кн.: Г. Крон. Тензорный анализ сетей. — М.: Сов. радио, 1978, с. 691—698.

Кузин Л. Т., Арменский А. Е., Петров А. Е., Абрамов Д. Ю., Ермаков А. Н. Тензорные банки данных. — Изв. вузов СССР. Приборостроение, 1984, т. 27, № 6, с. 38—40.

Ланжевен П. Избранные произведения. Статьи и речи по общим вопросам науки: Пер. с франц. — М.: ИЛ, 1949. — 196 с.

Максвелл Дж. К. Избранные сочинения по теории электромагнитного поля: Пер. с англ./Пер. З. В. Цейтлина; Под ред. П. С. Кудрявцева. — М.: Гостехиздат, 1954. — 668 с.

Петров А. Е. Тензоры и фреймы. — В кн.: Интеллектуальные банки данных/Под ред. Л. Т. Кузина. — Тбилиси, 1982, с. 21—23.

Победра Б. Е. Лекции по тензорному анализу. — М.: МГУ, 1974. — 206 с.

Подольский С. Труд человека и его отношение к распределению энергии. — Слово, 1880, № 4, с. 135—211.

Синдж Д. Л. Тензорные методы в динамике: Пер. с нем. — М.: ИЛ, 1947.

Страттон Дж. А. Теория электромагнетизма: Пер. с англ./Под ред. С. М. Рытова. — М.—Л.: Гостехиздат, 1948. — 536 с.

Сухотин Б. В. Основные проблемы грамматики и семантики в тензорном исчислении. — В кн.: Проблемы структурной лингвистики. — М.: Наука, 1978, с. 234—288.

Схоутен Я. А. Тензорный анализ для физиков: Пер. с англ./Пер. И. А. Кунина. — М.: Наука, 1965. — 456 с.

Тамм И. Е. Основы теории электричества. — М.: Наука, 1966. — 624 с.

Фридман А. Мир как пространство и время. — 2-е изд. — М.: Наука, 1965. — 112 с.

Хэпп Х. Диакоптика и электрические цепи: Пер. с англ./Под ред. В. Г. Миронова. — М.: Мир, 1974. — 342 с.

Alger Ph. (Ed.) The life and times of Gabriel Kron or walking around the world and tensors. — Schenectady: Mohawk Development Service, 1969. — 346 p.

Alexander J. W. A proof and extension of the Jordan — Brouwer separation theorem. — Trans. Amer. Math. Soc., 1922, v. 23, p. 333—351.

Balasubramanian N. V., Lynn J. W., Sen Gupta D. P. Differential forms on electromagnetic networks. — London: Butterworths, 1970. — 184 p.

Brameller A., John M. N., Scoff M. R. Practical diakoptics for electrical network. — London: Chapman & Hall, 1969. — 212 p.

Brown B. A new treatment of analysis of dimensions. — Proc. Phys. Soc., 1941, v. 53, p. 418—432.

Duschek A., Hochrainer A. Grundzüge der Tensorrechnung in Analutscher Darstellung. — Wien: Springer, 1949. — 232 p.

Firestone F. A. A new analogy between mechanical and electrical systems. — J. Acoust. Soc., 1933, v. A4, p. 249—267.

Franken O. I. On the formulation of an economic equation of motion. — Matrix and Tensor Quarterly, 1974, v. 25, № 2, p. 39—47.

Gibbs W. J. Electrical machine analysis, Using tensors. — London: Pitman, 1967. — 86 p.

Happ H. H. (Ed.) Gabriel Kron and System Theory. — N.-Y., Schenectady: Union College Press, 1973. — 186 p.

Happ H. H. Piecewise Methods and Applications to Power Systems. — N.-Y., Wiley, 1980. — 405 p.

Hoffmann B. Kron's method of subspaces. — Quart. Appl. Math., 1944, v. 11, Oct., p. 218—231.

Hoffmann B. Kron's Non-Riemannian Electrodynamics. — Rev. Mod. Phys. (Einstein's 70-th birthday commemorative issue), 1949, v. 21, p. 535—540.

Hoffman B. Power invariance. — Matrix and Tensor Quarterly, 1957, v. 7, Sept., p. 2—4.

- Kirchoff Q.** Ueber die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchungen der linearen Vertheilung galvanischer ströme führt wird. — *Poggendorf's Ann. Physik u. Chemie*, 1847, v. 72, p. 497—508.
- Kron G.** Generalized theory of electric machinery. — *AIEE Trans.*, 1930, v. 49, Apr., p. 666—683.
- Kron G.** Non-Riemannian dynamics of rotating electrical machinery. — *J. Math. Phys.*, 1934, v. 13, № 2, p. 103—194.
- Kron G.** The application of tensors to the analysis of rotating electrical machinery. — New York, Schenectady: General Electric Rew., 1942, — 260 p.
- Kron G.** Equivalent circuit of the field equations of Maxwell. — *Proc. IRE*, 1944, v. 32, № 5, p. 289—299.
- Kron G.** Equivalent circuits of the elastic field. — *ASME Trans., J. Appl. Mech.*, 1944, v. 11, № 3, p. A-149—A-161.
- Kron G.** Electric circuit models of the Schrödinger equation. — *Phys. Rev.*, 1945, v. 67, ser. 2, № 1, p. 39—43.
- Kron G.** Electric circuit models of partial differential equations. — *AIEE Trans. Electrical Engineering*, 1948, v. 67, p. 672—684.
- Kron G.** A set principles to interconnect the solutions of physical systems. — *J. Appl. Phys.*, 1953, v. 24, № 8, p. 965—980.
- Kron G.** Equivalent circuits of electrical machinery. — New York: Wiley, 1951; London: Dover, 1967. — 278 p.
- Kron G.** Electric circuit models of the nuclear reactor. — *AIEE Trans. Communication and Electronics*, 1954, v. 73, p. 259—265.
- Kron G.** A generalization of the calculus of finite differences to non-uniformly spaced variables. — *AIEE Trans. Communication and Electronics*, 1958, v. 77, p. 539—544.
- Kron G.** Multi-dimensional space filters. — *Matrix and Tensor Quarterly*, 1958, v. 9, № 2, p. 40—43.
- Kron G.** Self-organizing, dynamo-type automata. — *Matrix and Tensor Quarterly*, 1960, v. 11, № 2, p. 42—52.
- Kron G.** Multi-dimensional curve-fitting with self-organizing automata. — *J. Math. Analysis and Appl.*, 1962, v. 5, № 1, p. 46—69.
- Lynn J. W.** Tensors in electrical engineering. — London: Pitman, 1963. — 216 p.
- Maxwell J. C.** Treatise on Electricity and Magnetism. — V. 1, — Oxford: Univ. Press, 1873. — 406 p.
- Okada S. and Onodera R. A.** Unified treatise on the topology of networks and algebra electromagnetism. — *RAAG Memoirs*, 1955, A-11, p. 68—112.
- Physical Structure in Systems Theory**/Ed. by J. J. van Dixhoorn and F. J. Evans. — London, N.-Y.: Academic Press, 1974. — 306 p.
- Research Association of Applied Geometry (RAAG) Memoirs.** — Tokyo. — V. 1, 1955, v. 2, 1958, v. 3, 1962 v. 4, 1968.
- Ricci J.** Atti della R. Acc. dei Lincei Rendiconti, V. 5, Pt. 1, 1889, p. 112, 643.
- Roth J. P.** An application of algebraic topology: Kron's method of thearing. — *Quart. Appl. Math.*, 1959, v. 17, № 1, Apr. p. 1—24.
- Stigant S. Austen.** Gabriel Kron on Tensor Analysis. Bibliographical List. — *BEAMA J.*, 1948, aug.
- Telldahl A.** Tensors and Sociodynamics. Pt. 1. The Postulate of Bi-Duality. — *Matrix and Tensor Quarterly*, Dec. 1974, v. 25, № 2, p. 48—58.
- Vehlen O.** Analysis Situs. — N.-Y.: American Mathematical Society, 1931. — 346 p.
- Weyl H.** Repartition de corrente et uno red conductora. — *Revista matemática, Hispano-Americana*, 1923, 5, p. 153—164.
- Wiener N.** Notes on the Kron theory of tensors in electrical machinery. — *J. Electrical Engineering, China*, 1936, № 3/4, p. 11—18.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Вступительная статья	3
Вокруг тензоров Крона — за и против	6
Введение	11
Глава 1. Тензоры проникают в технику	16
1.1. Тензоры, системы и античные статуи	16
1.2. Откуда взялись тензоры	21
1.3. Ковариантность и контравариантность	27
1.4. Единая теория электрических машин: «...ни одна действительно существующая физическая величина не пропущена»	39
1.5. Тензоры в электромеханике. Обобщенная машина и матрица преобразования	46
Глава 2. Тензоры в электротехнике на пространстве-структуре	59
2.1. Геометрия нового типа и недопустимые преобразования	60
2.2. Тензоры рассчитывают электрические цепи	69
2.3. Виды двойственности в электротехнике	85
2.4. Куда исчезает мощность	94
Глава 3. Путь к тензорной теории систем	106
3.1. Технология применения тензоров в теории систем	107
3.2. Ковариантность и контравариантность в теории систем	113
3.3. Тензорная форма уравнений балансового планирования	122
3.4. Эквивалентная модель для баланса продуктов	132
3.5. Полиэдральные модели или как создать самоорганизующийся волновой автомат	140
Заключение	147
Список литературы	149

Настоящая серия выпускается по рекомендации
IX Международного совещания представителей
научно-технических издательств социалистических с
(июнь 1975 г.).